

Capítulo 2

Solución de ecuaciones y desigualdades lineales



- 2.1** Reducción de términos semejantes
- 2.2** La propiedad de igualdad de la suma
- 2.3** La propiedad de igualdad de la multiplicación
- 2.4** Solución de ecuaciones lineales con una variable en un solo lado de la ecuación
- 2.5** Solución de ecuaciones lineales con la variable en ambos lados de la ecuación
- 2.6** Razones y proporciones
- 2.7** Desigualdades en una variable

Resumen del capítulo
Ejercicios de repaso del capítulo
Examen de práctica del capítulo
Examen de repaso acumulativo

Al tratar de predecir si un atleta impondrá un récord nuevo, es frecuente que los periodistas y entrenadores comparen su ritmo y desempeño actual con el ritmo que mantuvo el poseedor del récord en épocas diferentes durante la estación en que lo rompió. En la página 156 empleamos proporciones para determinar cuántos jonrones necesitaría anotar un jugador durante los primeros 50 juegos de una temporada de béisbol, para estar en posibilidad de romper el récord de 73 jonrones que estableció Barry Bond en la temporada de 2001 de béisbol.



Avance de la lección

Al describir el álgebra, muchos estudiantes utilizan las palabras resolver ecuaciones. Sin duda, esto es una parte importante del álgebra. El mayor énfasis de este capítulo está en enseñarle a solucionar ecuaciones lineales. A lo largo del libro emplearemos los principios aprendidos en este capítulo.

Para tener éxito al resolver ecuaciones lineales debemos comprender completamente la suma, resta, multiplicación y división de números reales, material que analizamos en el capítulo 1. El material de las cuatro primeras secciones de este capítulo es el fundamento para resolver ecuaciones lineales. En la sección 2.5 combinamos el material presentado en forma previa para resolver una variedad de ecuaciones lineales.

En la sección 2.6 analizamos las razones y proporciones, cómo plantearlas y resolverlas. Las proporciones pueden ser las ecuaciones que más empleen algunos estudiantes para resolver problemas de aplicación en la vida real. En la sección 2.7 analizaremos la solución de desigualdades lineales, que es una extensión de la solución de las ecuaciones lineales.

2.1 REDUCCIÓN DE TÉRMINOS SEMEJANTES



- 1 Identificar términos.
- 2 Identificar términos semejantes.
- 3 Reducir términos semejantes.
- 4 Utilizar la propiedad distributiva.
- 5 Eliminar los paréntesis cuando están precedidos de un signo más o menos.
- 6 Simplificar expresiones.

1 Identificar términos

En la sección 1.3 y otras, indicamos que las letras llamadas **variables** se emplean para representar números. Una variable puede representar diversos números.

Como señalamos en el capítulo 1, una **expresión** (o **expresión algebraica**) es un conjunto de números, variables, símbolos de agrupación y símbolos de operación.

Ejemplos de expresiones

$$5, \quad x^2 - 6, \quad 4x - 3, \quad 2(x + 5) + 6, \quad \frac{x + 3}{4}$$

Cuando una expresión algebraica consta de varias partes, a las partes que se *suman* se les denomina **términos**. La expresión $2x - 3y - 5$ puede escribirse como $2x + (-3y) + (-5)$, por lo que podemos decir que la expresión $2x - 3y - 5$ tiene tres términos: $2x$, $-3y$, y -5 . La expresión $3x^2 + 2xy + 5(x + y)$ también tiene tres términos: $3x^2$, $2xy$, y $5(x + y)$.

Al enumerar los términos de una expresión no es necesario indicar el signo + al comienzo.

Expresión

$$-2x + 3y - 8$$

$$3y^2 - 2x + \frac{1}{2}$$

Términos

$$-2x, 3y, -8$$

$$3y^2, -2x, \frac{1}{2}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 1

$$7 + x + 4 - 5x$$

$$3(x - 1) - 4x + 2$$

$$\frac{x + 4}{3} - 5x + 3$$

$$7, x, 4, -5x$$

$$3(x - 1), -4x, 2$$

$$\frac{x + 4}{3}, -5x, 3$$

La parte numérica de un término se denomina **coeficiente numérico**, o simplemente **coeficiente**. En el término $6x$, el 6 es el coeficiente numérico. Observe que $6x$ significa que la variable x se multiplica por 6.

Término	Coeficiente numérico
$3x$	3
$-\frac{1}{2}x$	$-\frac{1}{2}$
$4(x - 3)$	4
$\frac{2x}{3}$	$\frac{2}{3}$, ya que $\frac{2x}{3}$ significa $\frac{2}{3}x$
$\frac{x + 4}{3}$	$\frac{1}{3}$, porque $\frac{x + 4}{3}$ significa $\frac{1}{3}(x + 4)$

Siempre que un término aparezca sin coeficiente numérico, supondremos que es 1.

Ejemplos

x significa $1x$	$-x$ significa $-1x$
x^2 significa $1x^2$	$-x^2$ significa $-1x^2$
xy significa $1xy$	$-xy$ significa $-1xy$
$(x + 2)$ significa $1(x + 2)$	$-(x + 2)$ significa $-1(x + 2)$

Si una expresión tiene un término que es un número (sin variable), nos referimos a éste como **término constante**, o simplemente **constante**. En la expresión $x^2 + 3x - 4$, el -4 es un término constante o una constante.

2 Identificar términos semejantes

Los **términos semejantes** son aquellos que tienen las mismas variables con los mismos exponentes. Los siguientes son ejemplos de términos semejantes y términos no semejantes. Observe que si dos términos son semejantes, sólo difieren en sus coeficientes numéricos.

Términos semejantes	Términos no semejantes	
$3x, -4x$	$3x, 2$	(Un término tiene una variable, el otro es una constante.)
$4y, 6y$	$3x, 4y$	(Las variables difieren.)
$5, -6$	$x, 3$	(Un término tiene una variable, el otro es una constante.)
$3(x + 1), -2(x + 1)$	$2x, 3xy$	(Las variables difieren.)
$3x^2, 4x^2$	$3x, 4x^2$	(Los exponentes difieren.)
$5ab, 2ab$	$4a, 2ab$	(Las variables difieren.)

EJEMPLO 1 Identifique los términos semejantes

a) $2x + 3x + 4$ b) $2x + 3y + 2$ c) $x + 3 + y - \frac{1}{2}$ d) $x + 3x^2 - 4x^2$

Solución a) $2x$ y $3x$ son términos semejantes.

b) No hay términos semejantes.

c) 3 y $-\frac{1}{2}$ son términos semejantes.

d) $3x^2$ y $-4x^2$ son términos semejantes. 

EJEMPLO 2 Identifique los términos semejantes.

a) $5x - x + 6$ b) $3 - 2x + 4x - 6$ c) $12 + x^2 - x + 7$

Solución a) $5x$ y $-x$ (o $-1x$) son términos semejantes.

b) 3 y -6 son términos semejantes; $-2x$ y $4x$ son términos semejantes.

c) 12 y 7 son términos semejantes. 

3 Reducir términos semejantes

Con frecuencia, necesitamos simplificar expresiones mediante la reducción de términos semejantes. **Reducir términos semejantes** significa sumar o restar aquellos que en una expresión sean términos semejantes. Para hacerlo, empleamos el siguiente procedimiento.

Reduzca términos semejantes

1. Determine cuáles términos son semejantes.
2. Sume o reste los coeficientes de los términos semejantes.
3. Multiplique el número que se haya encontrado en el paso 2 por la(s) variable(s) en común.

Los ejemplos 3 a 8 ilustran este procedimiento.

EJEMPLO 3 Reducir los términos semejantes: $5x + 4x$.

Solución $5x$ y $4x$ son términos semejantes con x como la variable en común. Como $5 + 4 = 9$, entonces $5x + 4x = 9x$. 

EJEMPLO 4 Reducir los términos semejantes: $\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}x$.

Solución Como $\frac{3}{5} - \frac{2}{3} = \frac{9}{15} - \frac{10}{15} = -\frac{1}{15}$, entonces $\frac{3}{5}x - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{15}x$. 

EJEMPLO 5 Reducir los términos semejantes: $5.23a - 7.45a$.

Solución Como $5.23 - 7.45 = -2.22$, entonces $5.23a - 7.45a = -2.22a$. 

EJEMPLO 6 Reducir los términos semejantes: $3x + x + 5$.

Solución $3x$ y x son términos semejantes.

$$3x + x + 5 = 3x + 1x + 5 = 4x + 5$$


Debido a la propiedad conmutativa de la suma, el orden de los términos en la respuesta no tiene mucha importancia. Por ello, $5 + 4x$ también es una respuesta aceptable para el ejemplo 6. Generalmente, al escribir las respuestas enlistamos los términos que contienen variables en orden alfabético de izquierda a derecha, y dejamos el término constante en el extremo derecho.

Al reacomodar los términos de los ejemplos 7 y 8, emplearemos las propiedades conmutativa y asociativa de la suma.

EJEMPLO 7 Reduzca los términos semejantes: $3b + 6a - 5 - 2a$.

Solución Los únicos términos semejantes son $6a$ y $-2a$.

$$3b + 6a - 5 - 2a = 6a - 2a + 3b - 5 \quad \text{Se ordenan los términos.}$$

$$= 4a + 3b - 5 \quad \text{Se reducen los términos semejantes.} \quad \star$$

EJEMPLO 8 Reduzca los términos semejantes: $-2x^2 + 3y - 4x^2 + 3 - y + 5$.

Solución $-2x^2$ y $-4x^2$ son términos semejantes.

$3y$ y $-y$ son semejantes.

3 y 5 también son semejantes.

Al agrupar los términos que son semejantes, queda

$$\begin{aligned} -2x^2 + 3y - 4x^2 + 3 - y + 5 &= -2x^2 - 4x^2 + 3y - y + 3 + 5 \\ &= -6x^2 + 2y + 8 \end{aligned} \quad \star$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 29

4 Utilizar la propiedad distributiva

En la sección 1.10 presentamos la propiedad distributiva. Debido a su importancia la estudiaremos nuevamente. Pero antes de hacerlo, regresemos un poco a la sustracción de números reales. De la sección 1.7, recordemos que

$$6 - 3 = 6 + (-3)$$

En general,

Para cualesquiera números reales, a y b ,

$$a - b = a + (-b)$$

Al analizar la propiedad distributiva haremos uso del hecho de que $a + (-b)$ significa $a - b$.

Propiedad distributiva

Para cualesquiera números reales, a , b y c ,

$$a(b + c) = ab + ac$$

EJEMPLO 9 Utilice la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

a) $2(x + 4)$ **b)** $-2(w + 4)$

Solución **a)** $2(x + 4) = 2x + 2(4) = 2x + 8$

b) $-2(w + 4) = -2w + (-2)(4) = -2w + (-8) = -2w - 8$

Observe que en el inciso **b)**, en lugar de dejar la respuesta como $-2w + (-8)$, escribimos $-2w - 8$, que es la forma apropiada. ★

EJEMPLO 10 Emplee la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

a) $3(x - 2)$ **b)** $-2(4x - 3)$

Solución **a)** Por la definición de resta, escribimos $x - 2$ como $x + (-2)$.

$$\begin{aligned} 3(x - 2) &= 3[x + (-2)] = 3x + 3(-2) \\ &= 3x + (-6) \\ &= 3x - 6 \end{aligned}$$

b) $-2(4x - 3) = -2[4x + (-3)] = -2(4x) + (-2)(-3) = -8x + 6$ 

Con frecuencia utilizamos la propiedad distributiva en el álgebra, por lo que necesitamos comprenderla bien, al grado de poder emplearla para simplificar una expresión sin tener que escribir todos los pasos enumerados en los ejemplos 9 y 10. Lo invitamos a estudiar con detenimiento el siguiente recuadro de Sugerencia.

SUGERENCIA

Con un poco de práctica, será capaz de eliminar algunos de los pasos intermedios al utilizar la propiedad distributiva. Al utilizar dicha propiedad, existen ocho combinaciones de signos. Estudie y aprenda las ocho posibilidades siguientes.

Coeficiente positivo

a) $2(x) = 2x$
 $2(\overbrace{x+3}) = 2x+6$
 $2(+3) = +6$

b) $2(x) = 2x$
 $2(\overbrace{x-3}) = 2x-6$
 $2(-3) = -6$

c) $2(-x) = -2x$
 $2(\overbrace{-x+3}) = -2x+6$
 $2(+3) = +6$

d) $2(-x) = -2x$
 $2(\overbrace{-x-3}) = -2x-6$
 $2(-3) = -6$

Coeficiente negativo

e) $(-2)(x) = -2x$
 $-2(\overbrace{x+3}) = -2x-6$
 $(-2)(+3) = -6$

f) $(-2)(x) = -2x$
 $-2(\overbrace{x-3}) = -2x+6$
 $(-2)(-3) = +6$

g) $(-2)(-x) = 2x$
 $-2(\overbrace{-x+3}) = 2x-6$
 $(-2)(+3) = -6$

h) $(-2)(-x) = 2x$
 $-2(\overbrace{-x-3}) = 2x+6$
 $(-2)(-3) = +6$

La propiedad distributiva se expande como sigue:

$$a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$$

Ejemplos de la propiedad distributiva expandida

$$3(x + y + z) = 3x + 3y + 3z$$

$$2(x + y - 3) = 2x + 2y - 6$$

EJEMPLO 11 Utilice la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

a) $4(x - 3)$ **b)** $-2(2x - 4)$ **c)** $-\frac{1}{2}(4r + 5)$ **d)** $-2(3x - 2y + 4z)$

Solución

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & 4(x - 3) = 4x - 12 \\ \text{b)} & -2(2x - 4) = -4x + 8 \\ \text{c)} & -\frac{1}{2}(4r + 5) = -2r - \frac{5}{2} \\ \text{d)} & -2(3x - 2y + 4z) = -6x + 4y - 8z \end{array} \quad \star$$

La propiedad distributiva también se aplica por el lado derecho, como se ilustra en el ejemplo 12.

EJEMPLO 12 Emplee la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis de la expresión $(2x - 8y)4$.

Solución Se distribuye el 4 del lado derecho del paréntesis, sobre los términos dentro de éste.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 83

$$\begin{aligned} (2x - 8y)4 &= 2x(4) - 8y(4) \\ &= 8x - 32y \end{aligned} \quad \star$$

El ejemplo 12 hubiera podido reescribirse como $4(2x - 8y)$, de acuerdo con la propiedad conmutativa de la multiplicación, para después distribuir el 4 desde la izquierda y obtener la misma respuesta, $8x - 32y$.

5 Eliminar los paréntesis cuando están precedidos de un signo más o menos

¿Cómo eliminar los paréntesis en la expresión $(4x + 3)$? Recordemos que cuando no se observa ningún coeficiente junto a la expresión, éste será igual a 1. Por tanto, se escribe

$$\begin{aligned} (4x + 3) &= 1(4x + 3) \\ &= 1(4x) + (1)(3) \\ &= 4x + 3 \end{aligned}$$

Observe que $(4x + 3) = 4x + 3$. **Si a un paréntesis no lo precede ningún signo o lo hace un signo positivo, es posible eliminarlo sin tener que cambiar la expresión dentro de él.**

Ejemplos

$$\begin{aligned} (x + 3) &= x + 3 \\ (2x - 3) &= 2x - 3 \\ +(2x - 5) &= 2x - 5 \\ +(x + 2y - 6) &= x + 2y - 6 \end{aligned}$$

Ahora, considere la expresión $-(4x + 3)$. ¿Cómo eliminamos los paréntesis de esta expresión? En este caso, el coeficiente frente al paréntesis es -1 , por lo que multiplicamos cada término de la expresión.

$$\begin{aligned} -(4x + 3) &= -1(4x + 3) \\ &= -1(4x) + (-1)(3) \\ &= -4x + (-3) \\ &= -4x - 3 \end{aligned}$$

Así, $-(4x + 3) = -4x - 3$. **Si un signo negativo precede al paréntesis, cuando se elimina éste cambian los signos de todos los términos de adentro.**

Ejemplos

$$-(x + 4) = -x - 4$$

$$-(-2x + 3) = 2x - 3$$

$$-(5x - y + 3) = -5x + y - 3$$

$$-(-4c - 3d - 5) = 4c + 3d + 5$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 77

6 Simplificar expresiones

Al combinar lo que se aprendió en los análisis anteriores, obtenemos el siguiente procedimiento para **simplificar una expresión**.

Para simplificar una expresión

1. Utilice la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.
2. Reduzca términos semejantes.

EJEMPLO 13 Simplifique $6 - (2x + 3)$.

Solución

$$\begin{aligned} 6 - (2x + 3) &= 6 - 2x - 3 && \text{Emplee la propiedad distributiva.} \\ &= -2x + 3 && \text{Reduzca términos semejantes.} \end{aligned}$$

Nota: $3 - 2x$ es lo mismo que $-2x + 3$; sin embargo, generalmente escribimos primero el término que contiene la variable. 

EJEMPLO 14 Simplifique $-\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right) + 3x$

Solución

$$\begin{aligned} -\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}\right) + 3x &= -\frac{2}{3}x + \frac{1}{4} + 3x && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= -\frac{2}{3}x + 3x + \frac{1}{4} && \text{Ordenar términos.} \\ &= -\frac{2}{3}x + \frac{9}{3}x + \frac{1}{4} && \text{Escribir los términos de } x \text{ con el MCD, que es } 3. \\ &= \frac{7}{3}x + \frac{1}{4} && \text{Reducir términos semejantes.} \end{aligned} \quad \text{img alt="sun icon" data-bbox="890 650 910 665}$$

En el ejemplo 14, observe que $\frac{7}{3}x$ y $\frac{1}{4}$ no pueden combinarse debido a que no son términos semejantes.

EJEMPLO 15 Simplificar la expresión $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2}(3x - 5)$

Solución

$$\begin{aligned} \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}(3x - 5) &= \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}(3x) + \frac{1}{2}(-5) && \text{Propiedad distributiva.} \\ &= \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}x - \frac{5}{2} \\ &= \frac{3}{4}x + \frac{6}{4}x - \frac{5}{2} && \text{Escribir los términos de } x \text{ con el MCD, que es } 4. \\ &= \frac{9}{4}x - \frac{5}{2} && \text{Reducir los términos semejantes.} \end{aligned} \quad \text{img alt="sun icon" data-bbox="890 910 910 925}$$

EJEMPLO 16 Simplifique $3(2a - 5) - 3(b - 6) - 4a$

Solución $3(2a - 5) - 3(b - 6) - 4a = 6a - 15 - 3b + 18 - 4a$ *Propiedad distributiva.*

$$= 6a - 4a - 3b - 15 + 18 \quad \text{Ordenar términos.}$$

$$= 2a - 3b + 3$$
 Reducir términos

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 103**



SUGERENCIA

Es importante que distinga los conceptos *término* y *factor*. Al **multiplicar** dos o más expresiones, cada expresión es un **factor** del producto; por ejemplo, como $4 \cdot 3 = 12$, el 4 y el 3 son factores de 12. Como $3 \cdot x = 3x$, el 3 y la x son factores de $3x$. De manera similar, en la expresión $5xyz$, los factores son 5, x , y y z .

En una expresión, las partes que se **suman** son los **términos** de la expresión. Por ejemplo, la expresión $2x^2 + 3x - 4$, tiene tres términos, $2x^2$, $3x$ y -4 . Observe que los términos de una expresión pueden tener factores; por ejemplo, en el término $2x^2$, el 2 y la x^2 son factores porque están multiplicados.

Conjunto de ejercicios 2.1

Ejercicios conceptuales

-  1. a) ¿Qué son los términos de una expresión?
b) ¿Cuáles son los términos de $3x - 4y - 5$?
c) ¿Cuáles son los términos de $6xy + 3x - y - 9$?
 -  2. a) ¿Qué son términos semejantes? Determine si los siguientes son términos semejantes; y si no, explique por qué.
b) $3x, 4y$ c) $7, -2$
d) $5x^2, 2x$ e) $4x, -5xy$
 -  3. a) ¿Cuáles son los factores de una expresión?
b) Explique por qué 3 y x son factores de $3x$.
c) Explique por qué 5, x y y son factores de la expresión $5xy$.
 4. Considere la expresión $2x - 5$.
a) ¿Cómo se llama a la x ?
b) ¿Cómo se denomina a -5 ?
c) ¿Cómo se le llama a 2?
 5. a) ¿Cuál es el nombre que se da a la parte numérica de un término? Enumere los coeficientes de los siguientes términos.
b) $4x$ c) x d) $-x$

e) $\frac{3x}{5}$ f) $\frac{4}{7}(3t - 5)$
 -  6. ¿Qué significa simplificar una expresión?
 -  7. a) Explique la forma en que se elimina un paréntesis que contiene una expresión, y al cual precede un signo menos.
b) Escriba $-(x - 8)$ sin paréntesis.
 -  8. a) Diga cómo se elimina un paréntesis que contiene una expresión, cuando no lo precede ningún signo, o es un signo más el que lo precede.
b) Escriba $+(x - 8)$ sin paréntesis.

Práctica de habilidades

Reduzca los términos semejantes cuando sea posible. Si no lo es, reescriba la expresión como está.

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|------------------------------|
| 9. $5x + 3x$ | 10. $3x + 6$ | 11. $4x - 5x$ |
| 12. $4x + 3y$ | 13. $y + 3 + 4y$ | 14. $-2x - 3x$ |
| 15. $-2x + 5x$ | 16. $4x - 7x + 4$ | 17. $2 - 6x + 5$ |
| 18. $-7 - 4m - 6$ | 19. $-2w - 3w + 5$ | 20. $5x + 2y + 3 + y$ |
| 21. $-x + 2 - x - 2$ | 22. $8x - 2y - 1 - 3x$ | 23. $3 + 6x - 3 - 6x$ |
| 24. $y - 2y + 5$ | 25. $5 + 2x - 4x + 6$ | 26. $5s - 3s - 2s$ |
| 27. $4r - 6 - 6r - 2$ | 28. $-6t + 5 + 2t - 9$ | 29. $2 - 3x - 2x + y$ |
| 30. $7x - 3 - 2x$ | 31. $-2x + 4x - 3$ | 32. $4 - x + 4x - 8$ |

33. $b + 4 + \frac{3}{5}$

36. $13.4x + 1.2x + 8.3$

39. $2x^2 + 3y^2 + 4x + 5y^2$

42. $1 + x^2 + 6 - 3x^2$

45. $4 - 3n^2 + 9 - 2n$

48. $52x - 52x - 63.5 - 63.5$

51. $5w^3 + 2w^2 + w + 3$

54. $5ab - 3ab$

57. $4a^2 - 3ab + 6ab + b^2$

34. $\frac{3}{4}x + 2 + x$

37. $\frac{1}{2}a + 3b + 1$

40. $-4x^2 - 3.1 - 5.2$

43. $2x - 7y - 5x + 2y$

46. $9x + y - 2 - 4x$

49. $\frac{3}{5}x - 3 - \frac{7}{4}x - 2$

52. $4p^2 - 3p^2 + 2p - 5p$

55. $6x^2 - 6xy + 3y^2$

58. $4b^2 - 8bc + 5bc + c^2$

35. $5.1n + 6.42 - 4.3n$

38. $x + \frac{1}{2}y - \frac{3}{8}y$

41. $-x^2 + 2x^2 + y$

44. $3x - 7 - 9 + 4x$

47. $-19.36 + 40.02x + 12.25 - 18.3x$

50. $\frac{1}{2}y - 4 + \frac{3}{4}x - \frac{1}{5}y$

53. $2z - 5z^3 - 2z^3 - z^2$

56. $x^2 - 3xy - 2xy + 6$

Utilice la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.

59. $5(x + 2)$

62. $-2(y + 8)$

65. $-\frac{1}{2}(2x - 4)$

68. $4(m - 6)$

71. $-0.3(3x + 5)$

74. $-2(x + y - z)$

77. $-(-x + y)$

80. $-3(2a + 3b - 7)$

83. $2\left(3x - 2y + \frac{1}{4}\right)$

86. $(-p + 2q - 3)$

60. $3(x - 6)$

63. $-2(x - 4)$

66. $-4(x + 6)$

69. $\frac{4}{5}(s - 5)$

72. $-(x - 3)$

75. $0.7(2x + 0.5)$

78. $(3x + 4y - 6)$

81. $1.1(3.1x - 5.2y + 2.8)$

84. $2\left(-\frac{1}{2}x + 4y + 3\right)$

87. $-3(-x + 2y + 4)$

61. $5(x + 4)$

64. $2(-y + 5)$

67. $1(-4 + x)$

70. $5(x - y + 5)$

73. $\frac{1}{3}(3r - 12)$

76. $-(x + 4y)$

79. $-(2x + 4y - 8)$

82. $-4(-2m - 3n + 8)$

85. $(x + 3y - 9)$

88. $2.3(1.6x + 5.1y - 4.1)$

Simplifique las siguientes expresiones.

89. $3(x - 5) - x$

92. $-(3x - 3) + 5$

95. $2(x - y) + 2x + 3$

98. $4 + (2y + 2) + y$

101. $2(x - 3) - (x + 3)$

104. $4(x + 3) - 2x$

107. $-3(x + 1) + 5x + 6$

110. $-3(a + 2b) + 3(a + 2b)$

113. $4 + (3x - 4) - 5$

116. $6 - (a - 5) - (2b + 1)$

119. $-6x + 7y - (3 + x) + (x + 3)$

122. $\frac{2}{3}(r - 2) - \frac{1}{2}(r + 4)$

90. $2 + (x - 3)$

93. $6x + 2(4x + 9)$

96. $6 + (x - 5) + 3x$

99. $8x - (x - 3)$

102. $3y - (2x + 2y) - 6x$

105. $-(3s + 4) - (s + 2)$

108. $-(x + 2) + 3x - 6$

111. $0.4 + (y + 5) + 0.6 - 2$

114. $2y - 6(y - 2) + 3$

117. $-0.2(6 - x) - 4(y + 0.4)$

120. $3(t - 2) - 2(t + 4) - 6$

91. $-2(3 - x) + 7$

94. $3(x + y) + 2y$

97. $4(2c - 3) - 3(c - 4)$

100. $-(x - 5) - 3x + 4$

103. $4(x - 1) + 2(3 - x) - 4$

106. $6 - 2(x + 3) + 5x$

109. $4(m + 3) - 4m - 12$

112. $4 - (2 - x) + 3x$

115. $4(x + 2) - 3(x - 4) - 5$

118. $-5(2y - 8) - 3(1 + x) - 7$

121. $\frac{1}{2}(x + 3) + \frac{1}{3}(3x + 6)$

Solución de problemas

Si $\square + \square + \square + \odot + \odot$ se representa como $3\square + 2\odot$, escriba una expresión para representar cada una de las siguientes.

123. $\square + \ominus + \ominus + \square + \ominus$

124. $\otimes + \odot + \otimes + \odot + \odot + \odot$

125. $x + y + \triangle + \triangle + x + y + y$

126. $2 + x + 2 + \ominus + \ominus + 2 + y$

En los ejercicios 127 y 128, considere lo siguiente. Los factores positivos de 6 son 1, 2, 3 y 6, ya que

$$1 \cdot 6 = 6$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

↑ ↑
factores

127. Enliste todos los factores positivos de 12.

128. Diga todos los factores positivos de 16.

Reduzca los términos semejantes.

129. $3\triangle + 5\square - \triangle - 3\square$

130. $8\odot - 4\square - 2\square - 3\odot$

Problemas de reto

Simplifique.

131. $4x^2 + 5y^2 + 6(3x^2 - 5y^2) - 4x + 3$

133. $x^2 + 2y - y^2 + 3x + 5x^2 + 6y^2 + 5y$

132. $2x^2 - 4x + 8x^2 - 3(x + 2) - x^2 - 2$

134. $2[3 + 4(x - 5)] - [2 - (x - 3)]$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] Evalúe lo siguiente.

135. $|-7|$

136. $-|-16|$

[1.7] 137. Evalúe $-4 - 3 - (-6)$

[1.9] 138. Escriba un párrafo donde explique la jerarquía de operaciones.

139. Evalúe $-x^2 + 5x - 6$ cuando $x = -1$.

2.2 LA PROPIEDAD DE IGUALDAD DE LA SUMA



- 1 Identificar ecuaciones lineales.
- 2 Comprobar las soluciones de las ecuaciones.
- 3 Identificar ecuaciones equivalentes.
- 4 Utilizar la propiedad de la suma para resolver ecuaciones.
- 5 Resolver ecuaciones siguiendo algunos pasos mentalmente.

1 Identificar ecuaciones lineales

Una proposición que muestra la igualdad de dos expresiones algebraicas se denomina **ecuación**. Por ejemplo, $4x + 3 = 2x - 4$ es una ecuación. En este capítulo aprenderemos a resolver **ecuaciones lineales** con una variable.

DEFINICIÓN

Una **ecuación lineal** con una variable es una ecuación que se escribe de la siguiente manera:

$$ax + b = c$$

donde a , b y c son números reales, y $a \neq 0$.

Ejemplos de ecuaciones lineales

$$x + 4 = 7$$

$$2x - 4 = 6$$

2 Comprobar las soluciones de las ecuaciones

La **solución de una ecuación** es el número o números que hacen que ésta sea una proposición verdadera al sustituir la variable o variables; por ejemplo, la solución de $x + 4 = 7$ es 3. En breve aprenderemos a encontrar la solución de una ecuación, es decir, a **resolver una ecuación**; pero antes, aprenderemos a *comprobar* la solución de una ecuación.

La solución de una ecuación se **comprueba** sustituyendo en la ecuación original lo que pensamos es la solución. Si la sustitución genera una proposición verdadera, la solución es correcta; si da lugar a una proposición falsa, entonces la solución o la comprobación son incorrectas, y es necesario regresar para encontrar el error. Trate de comprobar todas sus soluciones, esto mejorará su habilidad con la aritmética y el álgebra.

Cuando se demuestre la comprobación de una solución, debe usar la notación $\stackrel{?}{=}$. Ésta se emplea al preguntar si una proposición es verdadera. Por ejemplo, si se usa

$$2 + 3 \stackrel{?}{=} 2(3) - 1$$

¿ $2 + 3 = 2(3) - 1$ es verdadero?

Para comprobar si 3 es la solución de $x + 4 = 7$, sustituimos con 3 cada x de la ecuación.

Comprobación: $x = 3$

$$x + 4 = 7$$

$$3 + 4 \stackrel{?}{=} 7$$

$$7 = 7 \quad \text{Verdadero.}$$

Como la comprobación da lugar a una proposición verdadera, 3 sí es la solución.

EJEMPLO 1

Considere la ecuación $2x - 4 = 6$. Determine si su solución es 3.

Solución

Para determinar si 3 es la solución de la ecuación, sustituimos con 3 cada x .

Comprobación: $x = 3$

$$2x - 4 = 6$$

$$2(3) - 4 \stackrel{?}{=} 6$$

$$6 - 4 \stackrel{?}{=} 6$$

$$2 = 6 \quad \text{Falso.}$$

Como obtuvimos una proposición que es falsa, 3 no es la solución de la ecuación.



Ahora veremos si 5 es la solución de la ecuación del ejemplo 1. La comprobación debe demostrar que 5 sí es la solución.

Como veremos en los ejemplos 2 y 3, para comprobar ecuaciones más complejas utilizamos los mismos procedimientos.

EJEMPLO 2 Determine si 18 es la solución de la siguiente ecuación.

$$3x - 2(x + 3) = 12$$

Solución Para determinar si 18 es la solución, sustituimos con 18 cada x de la ecuación. Si la sustitución genera una proposición correcta, entonces 18 es la solución.

Comprobación: $x = 18$

$$3x - 2(x + 3) = 12$$

$$3(18) - 2(18 + 3) \stackrel{?}{=} 12$$

$$3(18) - 2(21) \stackrel{?}{=} 12$$

$$54 - 42 \stackrel{?}{=} 12$$

$$12 = 12 \quad \text{Verdadero.}$$

Como se obtuvo una proposición verdadera, 18 sí es la solución. 

EJEMPLO 3 Determine si $-\frac{3}{2}$ es la solución de la siguiente ecuación.

$$3(n + 3) = 6 + n$$

Solución En esta ecuación la variable es n . Sustituimos con $-\frac{3}{2}$ cada n de la ecuación.

Comprobación: $n = -\frac{3}{2}$

$$3(n + 3) = 6 + n$$

$$3\left(-\frac{3}{2} + 3\right) \stackrel{?}{=} 6 + \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$3\left(-\frac{3}{2} + \frac{6}{2}\right) \stackrel{?}{=} \frac{12}{2} - \frac{3}{2}$$

$$3\left(\frac{3}{2}\right) \stackrel{?}{=} \frac{9}{2}$$

$$\frac{9}{2} = \frac{9}{2} \quad \text{Verdadero.}$$

Uso de la calculadora

Compruebe las soluciones

Es posible utilizar las calculadoras para comprobar las respuestas de las ecuaciones. Por ejemplo, para comprobar si $\frac{-10}{3}$ es la solución de la ecuación $2x + 3 = 5(x + 3) - 2$, hacemos lo siguiente.

1. Sustituimos con $\frac{-10}{3}$ cada x , como se muestra a continuación.

$$2x + 3 = 5(x + 3) - 2$$

$$2\left(\frac{-10}{3}\right) + 3 \stackrel{?}{=} 5\left(\frac{-10}{3} + 3\right) - 2$$

2. Evaluamos por separado cada lado de la ecuación, mediante la calculadora. Si obtenemos el mismo valor en ambos lados, la solución es correcta.

Calculadora científica



Para evaluar el lado izquierdo de la ecuación, $2\left(\frac{-10}{3}\right) + 3$, utilizamos las siguientes teclas:

$$2 \times \left(10 \div 3 \right) + 3 = -3.6666667$$

Para evaluar el lado derecho de la ecuación, $5\left(\frac{-10}{3} + 3\right) - 2$, utilizamos las siguientes teclas:

$$5 \times \left(10 \div 3 + 3 \right) - 2 = -3.6666667$$

Como ambos lados dan el mismo valor, la solución es correcta. Observe que, en ocasiones, debido a las diferencias de fabricación que puede haber entre las calculadoras, los resultados pueden diferir en el último dígito.

Calculadora graficadora



Lado izquierdo de la ecuación: $2 \left((-) 10 \div 3 \right) + 3 \text{ ENTER } -3.66666667$

Lado derecho de la ecuación: $5 \left((-) 10 \div 3 + 3 \right) - 2 \text{ ENTER } -3.66666667$

Como ambos lados de la ecuación dan el mismo resultado, la solución es la correcta.

3 Identificar ecuaciones equivalentes



FIGURA 2.1

Ahora que se sabemos cómo comprobar la solución de una ecuación, estudiaremos cómo resolverlas. En breve presentaremos los procedimientos completos para solucionarlas, pero por ahora debemos comprender que **para resolver una ecuación, es necesario aislar la variable de un lado del signo de igualdad. Esto se conoce como despejar la variable.** Para despejar la variable hacemos uso de dos propiedades: la de igualdad de la suma y para la multiplicación. Observe la figura 2.1.

Piense en una ecuación como una proposición balanceada cuyo lado izquierdo se equilibra con el derecho. Es decir, ambos lados siempre deben permanecer iguales. **Se garantiza que una ecuación siempre permanezca igual si se hace lo mismo en sus dos lados.** Por ejemplo, si sumamos un número en el lado izquierdo de la ecuación, debemos sumar exactamente el mismo número en el lado derecho. Si multiplicamos el lado derecho de la ecuación por cierto número, debemos multiplicar el lado izquierdo por el mismo número.

Al sumar el mismo número en ambos lados de una ecuación, o multiplicar por el mismo número distinto de cero, no cambia la solución de la ecuación, sólo la forma. A dos o más ecuaciones con la misma solución se les denomina **ecuaciones equivalentes**. Las ecuaciones $2x - 4 = 2$, $2x = 6$ y $x = 3$, son equivalentes, ya que la solución de cada una es 3.

Comprobación: $x = 3$

$$\begin{array}{lll}
 2x - 4 = 2 & 2x = 6 & x = 3 \\
 2(3) - 4 \stackrel{?}{=} 2 & 2(3) \stackrel{?}{=} 6 & 3 = 3 \text{ Verdadero.} \\
 6 - 4 \stackrel{?}{=} 2 & 6 = 6 \text{ Verdadero.} & \\
 2 = 2 \text{ Verdadero.} & &
 \end{array}$$

Al resolver una ecuación, empleamos las propiedades de la suma y la multiplicación para expresar una ecuación dada como ecuaciones equivalentes más sencillas, hasta obtener la solución.

4 Utilizar la propiedad de la suma para resolver ecuaciones

Ahora, estamos listos para definir la **propiedad de igualdad de la suma**.

Propiedad de igualdad de la suma

Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$, para cualesquiera números reales a, b y c .

Esta propiedad nos permite sumar el mismo número en ambos lados de una ecuación sin cambiar la solución. La **propiedad de la suma se utiliza para resolver ecuaciones de la forma $x + a = b$** . Para despejar la variable x en estas ecuaciones, sumamos el opuesto o inverso aditivo de a , $-a$, en ambos lados de la ecuación.

Para despejar la variable cuando resolvemos ecuaciones de la forma $x + a = b$, **usamos la propiedad de la suma para eliminar el número en el mismo lado del signo de igualdad en el que está la variable**. Estudie con cuidado los ejemplos que se muestran a continuación.

Ecuación	Para resolver, se usa la propiedad de la suma para eliminar el número
$x + 8 = 10$	8
$x - 7 = 12$	-7
$5 = x - 12$	-12
$-4 = x + 9$	9

Ahora, resolveremos algunos ejemplos.

Ejemplo 4 Resuelva la ecuación $x - 4 = -3$.

Solución Para despejar la variable, x , debe eliminarse el -4 del lado izquierdo de la ecuación. Para hacer esto, sumamos 4, que es el opuesto de -4 , en *ambos lados* de la ecuación.

$$\begin{array}{l}
 x - 4 = -3 \\
 x - 4 + 4 = -3 + 4 \text{ Sumar 4 en ambos lados.} \\
 x + 0 = 1 \\
 x = 1
 \end{array}$$

Observe cómo ayuda el proceso a despejar x .

Comprobación:

$$\begin{array}{l}
 x - 4 = -3 \\
 1 - 4 \stackrel{?}{=} -3 \\
 -3 = -3 \text{ Verdadero.}
 \end{array}$$



En el ejemplo 5, no se hará la comprobación. Limitaciones de espacio impiden que se hagan todas las comprobaciones. Sin embargo, *usted debe comprobar todas sus respuestas*.

Ejemplo 5 Resuelva la ecuación $x + 5 = 9$.

Solución Para resolver esta ecuación, debemos despejarse la variable x . Por tanto, es necesario eliminar el 5 del lado izquierdo de la ecuación. Para hacerlo, sumamos -5 , opuesto de 5, en *ambos lados*.

$$\begin{aligned}x + 5 &= 9 \\x + 5 + (-5) &= 9 + (-5) && \text{Sumar } -5 \text{ en ambos lados.} \\x + 0 &= 4 \\x &= 4\end{aligned}$$



En el ejemplo 5, sumamos -5 en ambos lados de la ecuación. De la sección 1.7 sabemos que $5 + (-5) = 5 - 5$. Por lo tanto, observamos que sumar un 5 negativo en ambos lados de la ecuación equivale a restar 5 de ambos lados. De acuerdo con la propiedad de la suma, es posible **sumar** el mismo número en ambos lados de una ecuación. **Como la resta se define en términos de la suma, la propiedad de la suma también permite restar el mismo número en ambos lados de la ecuación.** Así, el ejemplo 5 hubiera podido resolverse como sigue:

$$\begin{aligned}x + 5 &= 9 \\x + 5 - 5 &= 9 - 5 && \text{Restar 5 en ambos lados.} \\x + 0 &= 4 \\x &= 4\end{aligned}$$

En este texto, a menos que haya una razón específica para hacer lo contrario, restaremos un número en ambos lados de la ecuación en vez de sumar uno negativo.

Ejemplo 6 Resuelva la ecuación $k + 7 = -3$.

Solución Debe despejarse la variable k .

$$\begin{aligned}k + 7 &= -3 \\k + 7 - 7 &= -3 - 7 && \text{Restar 7 en ambos lados.} \\k + 0 &= -10 \\k &= -10\end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned}k + 7 &= -3 \\-10 + 7 &\stackrel{?}{=} -3 \\-3 &= -3 && \text{Verdadero.}\end{aligned}$$



AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 51

SUGERENCIA

Recuerde que la meta al resolver una ecuación es dejar a la variable sola en un lado de la ecuación. Para ello, sumamos o restamos en ambos lados de la ecuación **el número que se encuentra del mismo lado de la variable**.

(continúa en la página siguiente)

ECUACIÓN	DEBE ELIMINARSE	NÚMERO POR SUMAR (O RESTAR) EN (O DE) AMBOS LADOS DE LA ECUACIÓN	RESULTADOS CORRECTOS	SOLUCIÓN
$x - 5 = 8$	-5	Sumar 5	$x - 5 + 5 = 8 + 5$	$x = 13$
$x - 3 = -12$	-3	Sumar 3	$x - 3 + 3 = -12 + 3$	$x = -9$
$2 = x - 7$	-7	Sumar 7	$2 + 7 = x - 7 + 7$	$9 = x$ o $x = 9$
$x + 12 = -5$	+12	Restar 12	$x + 12 - 12 = -5 - 12$	$x = -17$
$6 = x + 4$	+4	Restar 4	$6 - 4 = x + 4 - 4$	$2 = x$ o $x = 2$
$13 = x + 9$	+9	Restar 9	$13 - 9 = x + 9 - 9$	$4 = x$ o $x = 4$

Observe la columna de *Resultados correctos*; cuando la ecuación se simplifica con la reducción de términos, la x quedará despejada debido a que la suma de un número con su opuesto es igual a 0, y $x + 0$ es igual a x .

Ejemplo 7 Resuelva la ecuación $6 = x - 9$.

Solución La variable x está en el lado derecho de la ecuación. Para despejarla debe eliminarse el -9 del mismo lado. Esto se lleva a cabo sumando 9 en ambos lados.

$$\begin{aligned}
 6 &= x - 9 \\
 6 + 9 &= x - 9 + 9 && \text{Sumar 9 en ambos lados.} \\
 15 &= x + 0 \\
 15 &= x
 \end{aligned}$$

Por tanto, la solución es 15. 

Ejemplo 8 Resuelva la ecuación $-6.25 = y + 12.78$.

Solución La variable se encuentra en el lado derecho de la ecuación. Para despejarla, restamos 12.78 de ambos lados.

$$\begin{aligned}
 -6.25 &= y + 12.78 \\
 -6.25 - 12.78 &= y + 12.78 - 12.78 && \text{Restar 12.78 en ambos lados.} \\
 -19.03 &= y + 0 \\
 -19.03 &= y
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 67

La solución es -19.03 . 

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Al resolver una ecuación, la meta es dejar a la variable sola en un lado del signo de igualdad. Considere la ecuación $x + 3 = -4$. ¿Cómo se resuelve?

CORRECTO

Se elimina el 3 del lado derecho de la ecuación.

$$\begin{aligned}
 x + 3 &= -4 \\
 x + 3 - 3 &= -4 - 3 \\
 x &= -7
 \end{aligned}$$

La variable ya está despejada.

INCORRECTO

Se elimina el -4 del lado derecho de la ecuación.

$$\begin{aligned}
 x + 3 &= -4 \\
 x + 3 + 4 &= -4 + 4 \\
 x + 7 &= 0
 \end{aligned}$$

La variable **no** está despejada.

No olvide utilizar la propiedad de la suma para *eliminar el número que está en el mismo lado de la ecuación en el que se encuentra la variable*.

5 Resolver ecuaciones siguiendo algunos pasos mentalmente

Considere los siguientes problemas.

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad x - 5 &= 12 \\ x - 5 + 5 &= 12 + 5 \\ x + 0 &= 12 + 5 \\ x &= 17\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad 15 &= x + 3 \\ 15 - 3 &= x + 3 - 3 \\ 15 - 3 &= x + 0 \\ 12 &= x\end{aligned}$$

Observe que el número que está en el mismo lado del signo de igualdad que la variable se transfiere al lado opuesto cuando se aplica la propiedad de la suma. Asimismo, note que el signo del número cambia cuando éste pasa de un lado al otro.

Una vez que sienta confianza al emplear la propiedad de igualdad de la suma, tal vez querrá efectuar algunos de los pasos mentalmente a fin de disminuir el trabajo escrito; por ejemplo, los dos problemas anteriores pueden abreviarse como sigue:

FORMA ABREVIADA

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad x - 5 &= 12 \\ x - 5 + 5 &= 12 + 5 & \leftarrow \text{Hacer esto en forma mental} \\ x &= 12 + 5 \\ x &= 17\end{aligned}$$

FORMA ABREVIADA

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad 15 &= x + 3 \\ 15 - 3 &= x + 3 - 3 & \leftarrow \text{Hacer esto en forma mental} \\ 15 - 3 &= x \\ 12 &= x\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 55

Conjunto de ejercicios 2.2

Ejercicios conceptuales

- ¿Qué es una ecuación?
- ¿Qué quiere decir *solución de una ecuación*?
 - ¿Qué significa *resolver una ecuación*?
- Explique cómo comprobar la solución de una ecuación.
- Explique con sus propias palabras la propiedad de igualdad de la suma.
- ¿Qué son ecuaciones equivalentes?
- Para resolver una ecuación *se aísla la variable*.
 - Explique lo que eso significa.
 - Diga cómo se despeja la variable de las ecuaciones que se estudiaron en esta sección.
- Al resolver la ecuación $x - 4 = 6$, ¿sumaría 4 o restaría 6 en ambos lados de la ecuación? Explique su respuesta.
- Al resolver la ecuación $6 = x + 2$, ¿restaría 6 o restaría 2 en ambos lados de la ecuación? Explique su respuesta.
- Dé un ejemplo de ecuación lineal con una variable.
- Explique por qué son equivalentes las tres siguientes ecuaciones.

$$2x + 3 = 5, \quad 2x = 2, \quad x = 1$$
- Explique por qué la propiedad de la suma permite que se reste la misma cantidad en ambos lados de una ecuación.
- Para resolver la ecuación $x - \square = \triangle$, para x , ¿se suma $\square$ o se resta $\triangle$ de ambos lados de la ecuación? Explique.

Práctica de habilidades

- $x = 2$ es solución de $4x - 3 = 5$?
- $x = -3$ es solución de $2x - 5 = 5(x + 2)$?
- $p = 0$ es solución de $3p - 4 = 2(p + 3) - 10$?
- $x = -6$ es solución de $2x + 1 = x - 5$?
- $x = 1$ es solución de $2(x - 3) = -3(x + 1)$?
- $k = -1$ es solución de $-3(k - 3) = -4k + 3 - 5k$?

19. ¿ $x = 3.4$ es solución de $3(x + 2) - 3(x - 1) = 9$?

21. ¿ $x = \frac{1}{2}$ es solución de $4x - 4 = 2x - 2$?

23. ¿ $x = \frac{11}{2}$ es solución de $3(x + 2) = 5(x - 1)$?

20. ¿ $x = \frac{1}{2}$ es solución de $x + 3 = 3x + 2$?

22. ¿ $x = \frac{1}{2}$ es solución de $3x + 4 = 2x + 9$?

24. ¿ $h = 3$ es solución de $-(h - 5) - (h - 6) = 3h - 4$?

Resuelva cada ecuación y compruebe su respuesta.

25. $x + 5 = 9$

26. $x - 4 = 13$

27. $x + 1 = -6$

28. $x - 4 = -8$

29. $x + 4 = -5$

30. $x - 16 = 36$

31. $x + 9 = 52$

32. $9 + n = 9$

33. $-6 + w = 9$

34. $3 = 7 + t$

35. $27 = x + 16$

36. $50 = x - 25$

37. $-18 = -14 + x$

38. $7 + x = -50$

39. $9 + x = 4$

40. $x + 29 = -29$

41. $4 + x = -9$

42. $9 = x - 3$

43. $7 + r = -23$

44. $a - 5 = -9$

45. $8 = 8 + v$

46. $9 + x = 12$

47. $-4 = x - 3$

48. $-13 = 4 + x$

49. $12 = 16 + x$

50. $62 = z - 15$

51. $15 + x = -5$

52. $-20 = 4 + x$

53. $-10 = -10 + x$

54. $8 = 8 + x$

55. $5 = x - 12$

56. $-12 = 20 + c$

57. $-50 = x - 24$

58. $-29 + x = -15$

59. $43 = 15 + p$

60. $-25 = 74 + x$

61. $40.2 + x = -5.9$

62. $-27.23 + x = 9.77$

63. $-37 + x = 9.5$

64. $7.2 + x = 7.2$

65. $x - 8.77 = -17$

66. $6.1 + x = 10.2$

67. $9.32 = x + 3.75$

68. $139 = x - 117$

Solución de problemas

69. ¿Piensa que la ecuación $x + 1 = x + 2$ tiene un número real como solución? Explique su respuesta. (En la sección 2.5 se estudiarán ecuaciones como ésta).

70. ¿Piensa que la ecuación $x + 4 = x + 4$ tiene más de un número real como solución? Si así fuera, ¿cuántos tiene? Explique su respuesta.

Problemas de reto

Es posible resolver ecuaciones que contengan símbolos desconocidos. Resuelva cada ecuación para el símbolo que se indica, ya sea sumando o restando un símbolo a ambos lados de la ecuación. Explique cada respuesta. (Recuerde que para solucionar la ecuación necesitamos despegar el símbolo, es decir dejarlo solo en un lado de la ecuación).

71. $x - \triangle = \square$, para x

72. $\square + \odot = \triangle$, para $\odot$

73. $\odot = \square + \triangle$, para $\square$

74. $\square = \triangle + \odot$, para $\odot$



Actividad en grupo

Como grupo, estudie y responda el ejercicio 75.

75. Considere la ecuación $2(x + 3) = 2x + 6$.
- Miembro 1 del grupo: Determine si 4 es la solución de la ecuación.
 - Miembro 2 del grupo: Determine si -2 es la solución de la ecuación.
 - Miembro 3 del grupo: Determine si 0.3 es la solución de la ecuación.

- d) Cada miembro del grupo: Seleccione un número que no haya utilizado en los incisos a) a c) y diga si es la solución de la ecuación.

- e) Como grupo, escriban la que piensen sea la solución de la ecuación $2(x + 3) = 2x + 6$, y redacten un párrafo con el que expliquen su respuesta.

Ejercicios de aprendizaje acumulativo

[1.9] Evalúe las siguientes expresiones.

76. $3x + 4(x - 3) + 2$ cuando $x = 4$

77. $6x - 2(2x + 1)$ si $x = -3$

[2.1] Simplifique las siguientes expresiones.

78. $4x + 3(x - 2) - 5x - 7$

79. $-(2t + 4) + 3(4t - 5) - 3t$

2.3 LA PROPIEDAD DE IGUALDAD DE LA MULTIPLICACIÓN



- 1 Identificar los recíprocos.
- 2 Utilizar la propiedad de la multiplicación para resolver ecuaciones.
- 3 Resolver ecuaciones de la forma $-x = a$.
- 4 Ejecutar mentalmente algunos pasos para resolver ecuaciones.

1 Identificar los recíprocos

En la sección 1.10 se introdujo el **recíproco** (o inverso multiplicativo) de un número. Recuerde que dos números son recíprocos uno del otro si su producto es igual a 1. A continuación presentamos algunos ejemplos de números y sus recíprocos.

Número	Recíproco	Producto
2	$\frac{1}{2}$	$(2)\left(\frac{1}{2}\right) = 1$
$-\frac{3}{5}$	$-\frac{5}{3}$	$\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{3}\right) = 1$
-1	-1	$(-1)(-1) = 1$

El recíproco de un número positivo es otro número positivo, y el recíproco de uno negativo es otro negativo. Observe que el 0 no tiene recíproco, ¿por qué?

En general, si a representa un número distinto de cero, su recíproco es $\frac{1}{a}$.

Por ejemplo, el recíproco de 3 es $\frac{1}{3}$, y el de -2 es $-\frac{1}{2}$ o $-\frac{1}{2}$. El recíproco de $-\frac{3}{5}$ es

$-\frac{5}{3}$, que se escribe como $1 \div \left(-\frac{3}{5}\right)$. Se simplifica y queda $\left(\frac{1}{1}\right)\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3}$.

Por tanto, el recíproco de $-\frac{3}{5}$ es $-\frac{5}{3}$.

2 Utilizar la propiedad de la multiplicación para resolver ecuaciones

En la sección 2.2 empleamos la propiedad de igualdad de la suma para resolver ecuaciones de la forma $x + a = b$, donde a y b representan números reales. En esta sección utilizaremos la propiedad de igualdad de la multiplicación para solucionar ecuaciones de la forma $ax = b$, donde a y b representan números reales.

Es importante que advierta la diferencia que existe entre ecuaciones como $x + 2 = 8$ y $2x = 8$. En $x + 2 = 8$, el 2 es un *término* que se suma a la x , por lo que se usa la propiedad de la suma para resolver la ecuación. En $2x = 8$, el 2 es un *factor* de $2x$. El 2 es el coeficiente que multiplica a la x , por lo que para solucionar la ecuación se emplea la propiedad de la multiplicación. La propiedad de igualdad de la multiplicación se utiliza para resolver ecuaciones lineales en las que el coeficiente del término en x es un número diferente de 1.

A continuación se enuncia la *propiedad de igualdad de la multiplicación*.

Propiedad de igualdad de la multiplicación

Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$, para cualesquiera números reales a, b y c .

La propiedad de la multiplicación significa que es posible multiplicar ambos lados de una ecuación por un mismo número distinto de cero sin cambiar la solución. **La propiedad de la multiplicación puede utilizarse para resolver ecuaciones de la forma $ax = b$.** Es posible despejar la variable de ecuaciones que tengan esa forma multiplicando ambos lados por el recíproco de a , que es $\frac{1}{a}$. Con ello, el coeficiente numérico de la variable, x , es 1, que podemos omitir al escribir la variable. Con este proceso decimos que *eliminamos* el coeficiente de la variable.

Ecuación	Para resolver, utilice la propiedad de la multiplicación para eliminar el coeficiente
$4x = 9$	4
$-5x = 20$	-5
$15 = \frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}$
$7 = -9x$	-9

A continuación se resolverán algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Resuelva la ecuación $3x = 6$.

Solución Para despejar la variable, x , debe eliminarse el 3 del lado izquierdo de la ecuación; por lo que multiplicamos ambos lados por el recíproco de 3, que es $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}
 3x &= 6 \\
 \frac{1}{3} \cdot 3x &= \frac{1}{3} \cdot 6 && \text{Multiplicar ambos lados por } \frac{1}{3}. \\
 \frac{1}{\cancel{3}_1} \cdot \frac{1}{\cancel{3}_1} x &= \frac{1}{\cancel{3}_1} \cdot \frac{2}{\cancel{6}_1} && \text{Dividir los factores comunes.} \\
 1x &= 2 \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$



En el ejemplo 1, observe que $1x$ se reemplaza por x en el siguiente paso. Por lo general esto se hace mentalmente.

Ejemplo 2 Resuelva la ecuación $\frac{x}{2} = 4$.

Solución Como dividir entre 2 es lo mismo que multiplicar por $\frac{1}{2}$, la ecuación $\frac{x}{2} = 4$ es la misma que $\frac{1}{2}x = 4$. Por tanto, se multiplican ambos lados por el recíproco de $\frac{1}{2}$, que es 2.

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{2} &= 4 \\
 \frac{1}{2} \left(\frac{x}{\cancel{2}_1} \right) &= \frac{1}{2} \cdot 4 && \text{Multiplicar ambos lados por 2.} \\
 x &= 2 \cdot 4 \\
 x &= 8
 \end{aligned}$$



Ejemplo 3 Resuelva la ecuación $\frac{2}{3}x = 6$.

Solución El recíproco de $\frac{2}{3}$ es $\frac{3}{2}$. Se multiplican ambos lados de la ecuación por $\frac{3}{2}$.

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}x &= 6 \\ \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3}x &= \frac{3}{2} \cdot 6 && \text{Multiplicar ambos lados de la ecuación por } \frac{3}{2}. \\ 1x &= 9 \\ x &= 9\end{aligned}$$

Se comprobará esta solución.

Comprobación: $\frac{2}{3}x = 6$

$$\frac{2}{3}(9) \stackrel{?}{=} 6$$

$$6 = 6 \quad \text{Verdadero.}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 49

En el ejemplo 1, multiplicamos ambos lados de la ecuación $3x = 6$ por $\frac{1}{3}$ para despejar la variable. También podríamos haber despejado la variable dividiendo ambos lados entre 3, como sigue:

$$\begin{aligned}3x &= 6 \\ \frac{1}{3}x &= \frac{2}{1} && \text{Dividir ambos lados entre 3.} \\ \frac{1}{3}x &= 2 \\ x &= 2\end{aligned}$$

Podemos hacerlo ya que dividir entre 3 es equivalente a multiplicar por $\frac{1}{3}$. **Como la división puede definirse en términos de la multiplicación** ($\frac{a}{b}$ significa $a \cdot \frac{1}{b}$), **la propiedad de la multiplicación también nos permite dividir ambos lados de la ecuación entre un mismo número distinto de cero.** Este procedimiento se ilustra en los ejemplos 4 a 6.

Ejemplo 4 Resuelva la ecuación $8w = 3$.

Solución En esta ecuación la variable es w . Para resolverla, es necesario dividir ambos lados entre 8.

$$\begin{aligned}8w &= 3 \\ \frac{8w}{8} &= \frac{3}{8} && \text{Dividir ambos lados entre 8.} \\ w &= \frac{3}{8}\end{aligned}$$

Ejemplo 5 Resuelva la ecuación $-15 = -3z$.

Solución En esta ecuación la variable, z , se encuentra en el lado derecho del signo de igualdad. Para despejar z se dividen ambos lados de la ecuación entre -3 .

$$\begin{aligned}-15 &= -3z \\ \frac{-15}{-3} &= \frac{-3z}{-3} && \text{Dividir ambos lados entre } -3. \\ 5 &= z\end{aligned}$$

Ejemplo 6 Resuelva la ecuación $0.24x = 1.20$.

Solución Comenzamos por dividir ambos lados de la ecuación entre 0.24 a fin de despejar la variable x .

$$\begin{aligned} 0.24x &= 1.20 \\ \frac{0.24x}{0.24} &= \frac{1.20}{0.24} && \text{Dividir ambos lados entre 0.24.} \\ x &= 5 \end{aligned}$$



**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 35**

Puede ahorrar algo de tiempo si utiliza su calculadora para resolver los problemas que impliquen números decimales.

SUGERENCIA

Al resolver una ecuación de la forma $ax = b$, la variable puede despejarse con los siguientes pasos:

1. Multiplique ambos lados de la ecuación por el recíproco de a , que es $\frac{1}{a}$, como se hizo en los ejemplos 1, 2 y 3, o
2. Divida ambos lados de la ecuación entre a , como se efectuó en los ejemplos 4, 5 y 6.

Puede utilizar cualquiera de estos métodos para despejar la variable; sin embargo, si la ecuación contiene una o varias fracciones, llegará con mayor rapidez a la solución multiplicando por el recíproco de a . Esto se ilustra en los ejemplos 7 y 8.

Ejemplo 7 Resuelva la ecuación $-2x = \frac{3}{5}$.

Solución Como esta ecuación contiene una fracción, despejaremos la variable multiplicando ambos lados por $-\frac{1}{2}$, que es el recíproco de -2 .

$$\begin{aligned} -2x &= \frac{3}{5} \\ \left(-\frac{1}{2}\right)(-2x) &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) && \text{Multiplicar ambos lados por } -\frac{1}{2}. \\ 1x &= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{5}\right) \\ x &= -\frac{3}{10} \end{aligned}$$



En el ejemplo 7, si quisiera resolver la ecuación dividiendo ambos lados entre -2 , tendría que dividir la fracción $\frac{3}{5}$ entre -2 .

Ejemplo 8 Resuelva la ecuación $-6 = -\frac{3}{5}x$.

Solución Como esta ecuación contiene una fracción, despejemos la variable multiplicando ambos lados por el recíproco de $-\frac{3}{5}$, que es $-\frac{5}{3}$.

$$\begin{aligned} -6 &= -\frac{3}{5}x \\ \left(-\frac{5}{3}\right)(-6) &= \left(-\frac{5}{3}\right)\left(-\frac{3}{5}x\right) && \text{Multiplicar ambos lados por } -\frac{5}{3}. \\ 10 &= x \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 63**



En el ejemplo 8 escribimos la ecuación como $-6 = -\frac{3}{5}x$. Esta ecuación es equivalente a las ecuaciones $-6 = \frac{-3}{5}x$ y $-6 = \frac{3}{-5}x$. ¿Podría explicar por qué? Las tres ecuaciones tienen la misma solución, 10.

3 Resolver ecuaciones de la forma $-x = a$

Al resolver una ecuación podríamos obtener una ecuación como $-x = 7$. Ésta no es la solución, puesto que $-x = 7$ significa $-1x = 7$. La solución de una ecuación es de la forma $x =$ cierto número. Si una ecuación es de la forma $-x = 7$, se resuelve para x multiplicando ambos lados por -1 , como se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 9 Resuelva la ecuación $-x = 7$.

Solución $-x = 7$ significa que $-1x = 7$. Pero debe resolverse para x , no para $-x$. Se multiplican ambos lados de la ecuación por -1 a fin de despejar x en el lado izquierdo de la ecuación.

$$\begin{aligned} -x &= 7 \\ -1x &= 7 \\ (-1)(-1x) &= (-1)(7) && \text{Multiplicar ambos lados por } -1. \\ 1x &= -7 \\ x &= -7 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} -x &= 7 \\ -(-7) &\stackrel{?}{=} 7 \\ 7 &= 7 && \text{Verdadero.} \end{aligned}$$

Por tanto, la solución es -7 . 

También podemos resolver el ejemplo 9 dividiendo ambos lados de la ecuación entre -1 . Intente hacerlo para ver que obtiene la misma solución. Siempre que tengamos al opuesto (o negativo) de una variable igual a una cantidad, como en el ejemplo 9, podemos despejar la variable multiplicando (o dividiendo) ambos lados de la ecuación por -1 .

Ejemplo 10 Resuelva la ecuación $-x = -5$.

Solución

$$\begin{aligned} -x &= -5 \\ -1x &= -5 \\ (-1)(-1x) &= (-1)(-5) && \text{Multiplicar ambos lados por } -1. \\ 1x &= 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 23



SUGERENCIA

Para cualquier número real a , si $-x = a$, entonces $x = -a$.

Ejemplos

$$\begin{array}{ll} -x = 7 & -x = -2 \\ x = -7 & x = -(-2) \\ & x = 2 \end{array}$$

4 Ejecutar mentalmente algunos pasos para resolver ecuaciones

Cuando se sienta seguro al utilizar la propiedad de la multiplicación, tal vez quiera hacer algunos de estos pasos mentalmente a fin de reducir el trabajo por escrito. A continuación se presentan dos ejemplos resueltos detalladamente, junto con la forma abreviada.

Ejemplo 11 Resuelva la ecuación $-3x = -21$.

Solución

$$-3x = -21$$

$$\frac{-3x}{-3} = \frac{-21}{-3}$$

$$x = \frac{-21}{-3}$$

$$x = 7$$

← Hacer esto en forma mental

FORMA ABREVIADA

$$-3x = -21$$

$$x = \frac{-21}{-3}$$

$$x = 7$$



Ejemplo 12 Resuelva la ecuación $\frac{1}{3}x = 9$.

Solución

$$\frac{1}{3}x = 9$$

$$3\left(\frac{1}{3}x\right) = 3(9)$$

$$x = 3(9)$$

$$x = 27$$

← Hacer esto en forma mental

FORMA ABREVIADA

$$\frac{1}{3}x = 9$$

$$x = 3(9)$$

$$x = 27$$



**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 47**

En la sección 2.2 estudiamos la propiedad de la suma, y en esta sección la de la multiplicación. Es importante comprender la diferencia entre ambas. Estudie cuidadosamente el siguiente recuadro de Sugerencia.

SUGERENCIA

La **propiedad de la suma** se utiliza para resolver ecuaciones de la forma $x + a = b$.

La *propiedad de la suma* se emplea si un número se *suma o resta* de una variable.

$$x + 3 = -6$$

$$x + 3 - 3 = -6 - 3$$

$$x = -9$$

$$x - 5 = -2$$

$$x - 5 + 5 = -2 + 5$$

$$x = 3$$

La **propiedad de la multiplicación** se usa para resolver ecuaciones de la forma $ax = b$.

Se utiliza cuando una variable se *multiplca por o divide entre* un número.

$$3x = 6$$

$$\frac{3x}{3} = \frac{6}{3}$$

$$x = 2$$

$$\frac{x}{2} = 4$$

$$2\left(\frac{x}{2}\right) = 2(4)$$

$$x = 8$$

$$\frac{2}{5}x = 12$$

$$\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{2}{5}x\right) = \left(\frac{5}{2}\right)(12)$$

$$x = 30$$

Conjunto de ejercicios 2.3

Ejercicios conceptuales

1. Explique con sus propias palabras la propiedad de igualdad de la multiplicación.
2. Explique por qué la propiedad de la multiplicación permite dividir ambos lados de la ecuación entre una cantidad distinta de cero.
 - a) Si $-x = a$, donde a representa cualquier número real, ¿a qué es igual x ?
 - b) Si $-x = 5$, ¿cuánto vale x ?
 - c) Si $-x = -5$, ¿cuánto vale x ?
4. Para resolver la ecuación $3x = 5$, ¿dividiría entre 3 o entre 5 ambos lados? Explique su respuesta.
5. Para solucionar la ecuación $-2x = 5$, ¿dividiría entre -2 o entre 5 ambos lados? Explique su respuesta.
6. Si se quiere resolver la ecuación $\frac{x}{2} = 3$, ¿qué se haría para despejar la variable? Explíquelo.
7. Al solucionar la ecuación $4 = \frac{x}{3}$, ¿qué se hace para despejar la variable? Explique.
8. Si desea resolver para x la ecuación $ax = b$, ¿dividiría entre a o entre b ambos lados? Explique.

Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación y compruebe la solución.

- | | | | |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-----------------------------------|
| 9. $4x = 12$ | 10. $5x = 50$ | 11. $\frac{x}{2} = 4$ | 12. $\frac{y}{5} = 3$ |
| 13. $-4x = 12$ | 14. $8 = 16y$ | 15. $\frac{x}{4} = -2$ | 16. $\frac{x}{3} = -3$ |
| 17. $\frac{x}{5} = 1$ | 18. $-7x = 49$ | 19. $-27n = 81$ | 20. $16 = -4y$ |
| 21. $-7 = 3r$ | 22. $\frac{x}{8} = -3$ | 23. $-x = -11$ | 24. $-x = 9$ |
| 25. $10 = -y$ | 26. $-9 = \frac{k}{6}$ | 27. $-\frac{w}{3} = -13$ | 28. $5 = \frac{z}{12}$ |
| 29. $4 = -12x$ | 30. $12y = -15$ | 31. $-\frac{x}{3} = -2$ | 32. $-\frac{a}{8} = -7$ |
| 33. $43t = 26$ | 34. $-24x = -18$ | 35. $-4.2x = -8.4$ | 36. $-3.88 = 1.94y$ |
| 37. $7x = -7$ | 38. $3x = \frac{3}{5}$ | 39. $5x = -\frac{3}{8}$ | 40. $-2b = -\frac{4}{5}$ |
| 41. $15 = -\frac{x}{4}$ | 42. $\frac{c}{9} = 0$ | 43. $-\frac{b}{4} = -60$ | 44. $-x = -\frac{5}{9}$ |
| 45. $\frac{x}{5} = -7$ | 46. $-3r = 0$ | 47. $5 = \frac{x}{4}$ | 48. $-3 = \frac{x}{-5}$ |
| 49. $\frac{3}{5}d = -30$ | 50. $\frac{2}{7}x = 7$ | 51. $\frac{y}{-2} = 0$ | 52. $-6x = \frac{5}{2}$ |
| 53. $\frac{-7}{8}w = 0$ | 54. $-x = \frac{5}{8}$ | 55. $\frac{1}{5}x = 4.5$ | 56. $5 = -\frac{3}{5}s$ |
| 57. $-4 = -\frac{2}{3}z$ | 58. $-9 = \frac{-5}{3}n$ | 59. $-1.4x = 28.28$ | 60. $-0.42x = -2.142$ |
| 61. $-4w = \frac{7}{12}$ | 62. $6x = \frac{8}{3}$ | 63. $\frac{2}{3}x = 6$ | 64. $-\frac{1}{4}x = \frac{3}{4}$ |

Solución de problemas

65. a) Explique la diferencia entre $5 + x = 10$ y $5x = 10$.
 b) Resuelva $5 + x = 10$.
 c) Solucione $5x = 10$.
66. a) Explique la diferencia entre $3 + x = 6$ y $3x = 6$.
 b) Resuelva $3 + x = 6$.
 c) Solucione $3x = 6$.

67. Considere la ecuación $\frac{2}{3}x = 4$. Ésta podría resolverse multiplicando ambos lados por $\frac{3}{2}$, que es el recíproco de $\frac{2}{3}$, o dividiendo entre $\frac{2}{3}$. ¿Cuál método cree que sería más fácil? Explique su respuesta. Encuentre la solución.
68. Considere la ecuación $4x = \frac{3}{5}$. ¿Sería más sencillo resolverla dividiendo ambos lados entre 4, o multiplicándolos por $\frac{1}{4}$, el recíproco de 4? Explique su respuesta. Determine la solución del problema.
69. Considere la ecuación $\frac{3}{7}x = \frac{4}{5}$. ¿Sería más fácil resolverla dividiendo ambos lados entre $\frac{3}{7}$ o multiplicándolos por $\frac{7}{3}$, recíproco de $\frac{3}{7}$? Explique su respuesta y encuentre la solución.

Problemas de reto

70. Considere la ecuación $\square \odot = \triangle$.
- Si se quiere resolver para $\odot$, ¿cuál símbolo se necesita despejar?
 - ¿Cómo despejaríamos el símbolo que especificó en el inciso a)?
 - Resuelva la ecuación para $\odot$.
71. Considere la ecuación $\odot = \triangle \square$.
- Al resolver para $\square$, ¿qué símbolo sería necesario despejar?
 - ¿Cómo despejaríamos el símbolo especificado en el inciso a)?
 - Resuelva la ecuación para $\odot$.
72. Considere la ecuación $\# = \frac{\odot}{\triangle}$.
- Si se quiere resolver para $\odot$, ¿cuál símbolo se despejaría?
 - ¿Cómo despejaríamos el símbolo que especificó en el inciso a)?
 - Resuelva la ecuación para $\odot$.

Ejercicios de repaso acumulativo

- [1.7] 73. Reste -4 de -8 .
74. Evalúe $6 - (-3) - 5 - 4$.
- [1.9] 75. Evalúe la expresión $4^2 - 2^3 \cdot 6 \div 3 + 6$.
- [2.1] 76. Simplifique $-(x + 3) - 5(2x - 7) + 6$.
- [2.2] 77. Resuelva la ecuación $-48 = x + 9$.

2.4 SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES CON UNA VARIABLE EN UN SOLO LADO DE LA ECUACIÓN



- Solucionar ecuaciones lineales con una variable en un solo lado del signo de igualdad.
- Resolver ecuaciones que contienen números decimales o fracciones.

1 Solucionar ecuaciones lineales con una variable en un solo lado del signo de igualdad

En esta sección estudiaremos cómo resolver ecuaciones lineales empleando las propiedades de igualdad *tanto* de la suma como de la multiplicación, cuando una variable se encuentra en un solo lado del signo de igualdad. En la sección 2.5 estudiaremos cómo resolver ecuaciones lineales empleando las dos propiedades cuando una variable aparece en ambos lados del signo de igualdad.

El procedimiento general para resolver ecuaciones consiste en *despejar la variable*. Es decir, dejar a la variable, x , sola de un lado del signo de igualdad.

No hay ningún método que sea el *mejor* para resolver todas las ecuaciones lineales. A continuación damos un procedimiento que puede utilizarse para resolver ecuaciones lineales cuando la variable aparece sólo de un lado de la ecuación.

Para resolver ecuaciones lineales con la variable en un lado del signo de igualdad

- Si la ecuación contiene fracciones, se multiplican **ambos** lados por el mínimo común denominador (mcd). Esto eliminará las fracciones de la ecuación.

(continúa en la página siguiente)

2. Aproveche la propiedad distributiva para eliminar paréntesis.
3. Reduzca los términos semejantes que estén en el mismo lado del signo de igualdad.
4. Emplee la propiedad de la suma para obtener una ecuación con todos los términos que contienen a la variable de un lado del signo de igualdad, y una constante en el otro lado. Esto producirá una ecuación de la forma $ax = b$.
5. Utilice la propiedad de la multiplicación para despejar la variable. Esto dará una solución de la forma $x = \frac{b}{a}$ (o $1x = \frac{b}{a}$).
6. Compruebe la solución en la ecuación original.

Al resolver una ecuación siempre debe comprobarse su solución, como se indica en el paso 6. No mostraremos todas las comprobaciones por falta de espacio.

Al resolver una ecuación, recuerde que el objetivo es dejar la variable sola de un lado de la ecuación.

Considere la ecuación $2x + 4 = 10$, que no contiene fracciones ni paréntesis, y no existen términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad; por tanto, comenzamos en el paso 4, con el empleo de la propiedad de la suma. Recordemos que ésta permite sumar (o restar) la misma cantidad en (o de) ambos lados de una ecuación sin cambiar la solución. En este caso, restamos 4 de ambos lados para despejar el término que contiene a la variable.

Ecuación

$$2x + 4 = 10$$

$$2x + 4 - 4 = 10 - 4 \quad \text{Propiedad de la suma.}$$

$$\text{o bien } 2x = 6 \quad \text{Ahora hay que despejar el término con } x.$$

Observe que el término con la variable, $2x$, queda solo en un lado del signo de igualdad. Ahora empleamos la propiedad de la multiplicación, paso 5, para despejar la variable x . Recuerde que la propiedad de la multiplicación permite multiplicar o dividir ambos lados de la ecuación por el mismo número diferente de cero sin cambiar la solución. En este caso dividimos ambos lados entre 2, que es el coeficiente del término con la variable, para obtener la solución, 3.

$$2x = 6$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1} = \frac{3}{2}$$

Propiedad de la multiplicación.

$$x = 3$$

x ya está despejada.

La solución a la ecuación $2x + 4 = 10$ es 3. A continuación resolveremos algunos ejemplos.

Ejemplo 1 Resuelva la ecuación $3x - 6 = 15$.

Solución Seguiremos el procedimiento que se enunció para resolver ecuaciones. Como la ecuación no contiene fracciones ni paréntesis, y tampoco hay términos semejantes que reducir, comenzaremos en el paso 4.

Paso 4

$$3x - 6 = 15$$

$$3x - 6 + 6 = 15 + 6 \quad \text{Sumar 6 en ambos lados.}$$

$$3x = 21$$

Paso 5

$$\frac{3x}{3} = \frac{21}{3}$$

$$x = 7$$

Dividir ambos lados entre 3.

Paso 6 Comprobación:

$$3x - 6 = 15$$

$$3(7) - 6 \stackrel{?}{=} 15$$

$$21 - 6 \stackrel{?}{=} 15$$

$$15 = 15 \quad \text{Verdadero.}$$

Como la comprobación es verdadera, la solución es 7. Observe que después de realizar el paso 4 obtuvimos $3x = 21$, que es una ecuación de la forma $ax = b$. Una vez que concluimos el paso 5, obtenemos la respuesta en la forma $x =$ cierto número real. 

SUGERENCIA

Al resolver una ecuación que no contenga fracciones, **debe utilizar la propiedad de la suma (paso 4) antes de la de la multiplicación (paso 5)**. Si utiliza la propiedad de la multiplicación antes de la propiedad de la suma, puede obtener la respuesta correcta; pero por lo general tendrá que trabajar más y podría encontrarse con fracciones. ¿Qué habría pasado si hubiésemos intentado resolver el ejemplo 1 utilizando la propiedad de la multiplicación antes que la de la suma?

Ejemplo 2Resuelva la ecuación $-2r - 6 = -3$.**Solución**

Paso 4

$$-2r - 6 + 6 = -3 + 6 \quad \text{Sumar 6 en ambos lados.}$$

$$-2r = 3$$

Paso 5

$$\frac{-2r}{-2} = \frac{3}{-2} \quad \text{Dividir ambos lados entre } -2.$$

$$r = -\frac{3}{2}$$

Paso 6 Comprobación:

$$-2r - 6 = -3$$

$$-2\left(-\frac{3}{2}\right) - 6 \stackrel{?}{=} -3$$

$$3 - 6 \stackrel{?}{=} -3$$

$$-3 = -3 \quad \text{Verdadero.}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 19**La solución es $-\frac{3}{2}$. 

Observe que las comprobaciones se realizan siempre con la ecuación *original*. En algunos de los ejemplos siguientes omitiremos la prueba para ahorrar espacio. Usted debe comprobar todas sus respuestas.

Ejemplo 3Resuelva la ecuación $16 = 4x + 6 - 2x$.**Solución**

De nuevo debemos despejar la variable x . Como el lado derecho de la ecuación tiene dos términos semejantes que contienen a la variable x , primero se reducirán.

$$16 = 4x + 6 - 2x$$

Paso 3

$$16 = 2x + 6 \quad \text{Reducir términos semejantes.}$$

Paso 4 $16 - 6 = 2x + 6 - 6$ Restar 6 en ambos lados.

$$10 = 2x$$

Paso 5 $\frac{10}{2} = \frac{2x}{2}$ Dividir ambos lados entre 2.

$$5 = x$$



La solución anterior se resume como sigue.

$$16 = 4x + 6 - 2x$$

$$16 = 2x + 6 \quad \text{Se redujeron los términos semejantes.}$$

$$10 = 2x \quad \text{Se restó 6 en ambos lados.}$$

$$5 = x \quad \text{Se dividieron ambos lados entre 2.}$$

Ejemplo 4 Resuelva la ecuación $2(x + 4) - 5x = -3$.

Solución

$$2(x + 4) - 5x = -3$$

Paso 2 $2x + 8 - 5x = -3$ Emplear la propiedad distributiva.

Paso 3 $-3x + 8 = -3$ Reducir los términos semejantes.

Paso 4 $-3x + 8 - 8 = -3 - 8$ Restar 8 en ambos lados.

$$-3x = -11$$

Paso 5 $\frac{-3x}{-3} = \frac{-11}{-3}$ Dividir ambos lados entre -3.

$$x = \frac{11}{3}$$



La solución del ejemplo 4 se resume como sigue:

$$2(x + 4) - 5x = -3$$

$$2x + 8 - 5x = -3 \quad \text{Se utilizó la propiedad distributiva.}$$

$$-3x + 8 = -3 \quad \text{Se redujeron los términos semejantes.}$$

$$-3x = -11 \quad \text{Se restó 8 en ambos lados.}$$

$$x = \frac{11}{3} \quad \text{Se dividieron ambos lados entre -3.}$$

Ejemplo 5 Resuelva la ecuación $2t - (t + 2) = 6$.

Solución

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 79

$$2t - (t + 2) = 6$$

$$2t - t - 2 = 6 \quad \text{Se aplicó la propiedad distributiva.}$$

$$t - 2 = 6 \quad \text{Reducción de términos semejantes.}$$

$$t = 8 \quad \text{Se dividieron ambos lados entre 2.}$$



2 Resolver ecuaciones que contienen números decimales o fracciones

En el capítulo 3 resolveremos muchas ecuaciones que contienen números decimales. Para hacerlo, seguiremos el mismo procedimiento descrito. El ejemplo 6 ilustra dos métodos para solucionar una ecuación con números decimales.

Ejemplo 6 Resuelva la ecuación $x + 1.24 - 0.07x = 4.96$.

Solución Este ejemplo se resolverá empleando dos métodos. En el primero trabajaremos con números decimales durante el proceso de solución. En el segundo, multiplicaremos los dos lados de la ecuación por una potencia de 10 para cambiar los decimales por enteros.

Método 1

$$\begin{aligned}
 x + 1.24 - 0.07x &= 4.96 \\
 0.93x + 1.24 &= 4.96 && \text{Se redujeron los términos semejantes, } 1x - 0.07x = 0.93x. \\
 0.93x + 1.24 - 1.24 &= 4.96 - 1.24 && \text{Se resta 1.24 en ambos lados.} \\
 0.93x &= 3.72 \\
 \frac{0.93x}{0.93} &= \frac{3.72}{0.93} && \text{Se dividen ambos lados entre 0.93.} \\
 x &= 4
 \end{aligned}$$

Método 2 Algunos estudiantes prefieren eliminar los números decimales de la ecuación multiplicando ambos lados por 10 si los decimales están en décimas; por 100, si están en centésimas, y así sucesivamente. Como en el ejemplo 6 los decimales se hallan en centésimas, los eliminaremos multiplicando ambos lados de la ecuación por 100. Este método alternativo da como resultado lo siguiente.

$$\begin{aligned}
 x + 1.24 - 0.07x &= 4.96 \\
 100(x + 1.24 - 0.07x) &= 100(4.96) && \text{Multiplicar ambos lados por 100.} \\
 100(x) + 100(1.24) - 100(0.07x) &= 496 && \text{Propiedad distributiva.} \\
 100x + 124 - 7x &= 496 \\
 93x + 124 &= 496 && \text{Reducir términos semejantes.} \\
 93x &= 372 && \text{Se restó 124 en ambos lados.} \\
 x &= 4 && \text{Se dividieron ambos lados entre 93.}
 \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 41**

Estudie los dos métodos que se dan para que decida cuál prefiere. 

A continuación analizaremos la solución de ecuaciones que contienen fracciones. Habrá distintos momentos durante el curso en los que sea necesario resolver ecuaciones que incluyan fracciones. El primer paso para solucionarlas es multiplicar los dos lados por el mcd para eliminar las fracciones. Los ejemplos 7 a 9 ilustran el procedimiento.

Ejemplo 7 Resolver $\frac{x-3}{5} = 7$.

Solución El mcd de la fracción en este ejercicio es 5. El paso 1 del procedimiento dice que hay que multiplicar los dos lados de la ecuación por el mcd. Esto eliminará las fracciones de la ecuación.

$$\begin{aligned}
 \frac{x-3}{5} &= 7 \\
 \text{Paso 1} \quad 5\left(\frac{x-3}{5}\right) &= 5 \cdot 7 && \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, que es 5.} \\
 x-3 &= 35 \\
 \text{Paso 4} \quad x &= 38 && \text{Se sumó tres en ambos lados.}
 \end{aligned}$$

Paso 6 Comprobación:

$$\begin{aligned}\frac{x-3}{5} &= 7 \\ \frac{38-3}{5} &\stackrel{?}{=} 7 \\ \frac{35}{5} &\stackrel{?}{=} 7 \\ 7 &= 7\end{aligned}$$

Verdadero.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 45

Por tanto, la solución es 38.



En el ejemplo 7, la ecuación $\frac{x-3}{5} = 7$ también hubiera podido expresarse como $\frac{1}{5}(x-3) = 7$. Si la ecuación se hubiera dado de esta forma, habríamos comenzado la solución del mismo modo, con la multiplicación de ambos lados por el mcd, que es 5.

Ejemplo 8 Resolver $\frac{d}{2} + 3d = 14$.

Solución El paso 1 dice que es necesario multiplicar los dos lados de la ecuación por el mcd, 2. Esto eliminará las fracciones.

Paso 1 $2\left(\frac{d}{2} + 3d\right) = 14 \cdot 2$ Multiplicar ambos lados por el mcd, 2.

Paso 2 $2\left(\frac{d}{2}\right) + 2 \cdot 3d = 14 \cdot 2$ Propiedad distributiva.

$$d + 6d = 28$$

Paso 3 $7d = 28$ Se redujeron términos semejantes

Paso 5 $d = 4$ Se dividieron ambos lados entre 7.

Paso 6 Comprobación: $\frac{d}{2} + 3d = 14$

$$\frac{4}{2} + 3(4) \stackrel{?}{=} 14$$

$$2 + 12 \stackrel{?}{=} 14$$

$$14 = 14$$

Verdadero.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 89

Ejemplo 9 Resolver la ecuación $\frac{1}{5}x - \frac{3}{8}x = \frac{1}{10}$

Solución El mcd de 5, 8 y 10 es 40. Se multiplican ambos lados de la ecuación por 40 para eliminar las fracciones.

$$\frac{1}{5}x - \frac{3}{8}x = \frac{1}{10}$$

Paso 1 $40\left(\frac{1}{5}x - \frac{3}{8}x\right) = 40\left(\frac{1}{10}\right)$ Multiplicar los dos lados por el mcd, 40.

Paso 2 $40\left(\frac{1}{5}x\right) - 40\left(\frac{3}{8}x\right) = 40\left(\frac{1}{10}\right)$ Propiedad distributiva.

$$8x - 15x = 4$$

Paso 3 $-7x = 4$ Se redujeron términos semejantes.

Paso 5 $x = -\frac{4}{7}$ *Se dividieron ambos lados entre -7 .*

Paso 6 **Comprobación:** Sustituir con $-\frac{4}{7}$ cada x de la ecuación.

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}x - \frac{3}{8}x &= \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{7}\right) - \frac{3}{8}\left(-\frac{4}{7}\right) &\stackrel{?}{=} \frac{1}{10} && \text{Sustituir con } -\frac{4}{7} \text{ cada } x \text{ de la ecuación.} \\ -\frac{4}{35} + \frac{3}{14} &\stackrel{?}{=} \frac{1}{10} && \text{Dividir los factores comunes y después multiplicar las fracciones.} \\ -\frac{8}{70} + \frac{15}{70} &\stackrel{?}{=} \frac{7}{70} && \text{Escribir cada fracción con el mcd, 70.} \\ \frac{7}{70} &= \frac{7}{70} && \text{Verdadero.}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 99

SUGERENCIA

En el ejemplo 9, multiplicamos los dos lados de la ecuación por el mcd, que era 40. Al resolver ecuaciones que contienen fracciones, multiplicando ambos lados por *cualquier* denominador común, eventualmente se llegará a la respuesta correcta (si no se comete ningún error), pero tal vez se tenga que trabajar con números más grandes. En el ejemplo 9, si se hubieran multiplicado ambos lados por 80, 120 o 160, por ejemplo, se habría obtenido la respuesta $-\frac{4}{7}$ eventualmente. Al resolver ecuaciones en las que hay fracciones, deben multiplicarse ambos lados por el mcd. Pero si por error se multiplicaran ambos lados por un denominador común diferente con objeto de eliminar las fracciones, todavía sería posible obtener la respuesta correcta. Para demostrar que pueden emplearse otros denominadores comunes, ahora resuelva el ejemplo 9 con la multiplicación de ambos lados de la ecuación por el denominador común 80, en lugar del mcd 40.

Tal vez quiera comprobar las soluciones de las ecuaciones en las que hay fracciones mediante una calculadora; de ser así, trabaje por separado con cada lado de la ecuación. A continuación se muestran los pasos necesarios para evaluar, empleando una calculadora científica, el lado izquierdo de la ecuación del ejemplo 9, para $x = -\frac{4}{7}$.*

$$\begin{aligned}\frac{1}{5}x - \frac{3}{8}x &= \frac{1}{10} \\ \frac{1}{5}\left(-\frac{4}{7}\right) - \frac{3}{8}\left(-\frac{4}{7}\right) &= \frac{1}{10}\end{aligned}$$

Evaluar el lado izquierdo de la ecuación

$$1 \boxed{\div} 5 \boxed{\times} 4 \boxed{+/-} \boxed{\div} 7 \boxed{-} 3 \boxed{\div} 8 \boxed{\times} 4 \boxed{+/-} \boxed{\div} 7 \boxed{=} 0.1.$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 99

Como el lado derecho de la ecuación es $\frac{1}{10} = 0.1$, la respuesta sí coincide.

SUGERENCIA

Algunos de los términos de uso más común en álgebra son *evaluar*, *simplificar*, *resolver* y *comprobar*. Asegúrese de entender el significado de cada uno y la situación en que se utilizan.

(continúa en la página siguiente)

*Tal vez difiera la secuencia de teclas para diversas calculadoras científicas. Le recomendamos que lea el manual de instrucciones de su calculadora.

Evaluar: *Evaluar una expresión* significa determinar su equivalencia numérica.

$$\begin{aligned}
 \text{Evaluar} \quad & 16 \div 2^2 + 36 \div 4 \\
 & = 16 \div 4 + 36 \div 4 \\
 & = 4 + 36 \div 4 \\
 & = 4 + 9 \\
 & = 13
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Evaluar} \quad & -x^2 + 3x - 2 \text{ cuando } x = 4 \\
 & = -4^2 + 3(4) - 2 \\
 & = -16 + 12 - 2 \\
 & = -4 - 2 \\
 & = -6
 \end{aligned}$$

Simplificar: *Simplificar una expresión* significa realizar las operaciones y reducir los términos semejantes.

$$\begin{aligned}
 \text{Simplificar} \quad & 3(x - 2) - 4(2x + 3) \\
 & 3(x - 2) - 4(2x + 3) = 3x - 6 - 8x - 12 \\
 & \quad \quad \quad = -5x - 18
 \end{aligned}$$

Observe que al simplificar una expresión que contiene variables, por lo general no se llega a un valor numérico aislado, a menos que todos los términos de la variable sumen cero.

Resolver: *Resolver una ecuación* significa encontrar el valor o valores de la variable que hacen de la ecuación una proposición verdadera.

$$\begin{aligned}
 \text{Resolver} \quad & 2x + 3(x + 1) = 18 \\
 & 2x + 3x + 3 = 18 \\
 & 5x + 3 = 18 \\
 & 5x = 15 \\
 & x = 3
 \end{aligned}$$

Comprobación: *Comprobar la solución propuesta de una ecuación* consiste en sustituir su valor en la ecuación original. Si esta sustitución da lugar a una proposición verdadera, entonces la respuesta es correcta. Por ejemplo, para comprobar la solución de la ecuación anterior, utilizamos el 3 para sustituir cada x .

$$\begin{aligned}
 \text{Comprobación} \quad & 2x + 3(x + 1) = 18 \\
 & 2(3) + 3(3 + 1) \stackrel{?}{=} 18 \\
 & 6 + 3(4) \stackrel{?}{=} 18 \\
 & 6 + 12 \stackrel{?}{=} 18 \\
 & 18 = 18 \quad \text{Verdadero.}
 \end{aligned}$$

Como se obtuvo una proposición verdadera, la respuesta es correcta.

Es importante darse cuenta que las expresiones se pueden evaluar o simplificar (según el problema) y las ecuaciones se resuelven y después se comprueban.

Conjunto de ejercicios 2.4

Ejercicios conceptuales

1. ¿La ecuación $x + 3 = 2x + 5$ contiene una variable en un solo lado? Explique su respuesta.
2. ¿La ecuación $2x - 4 = 3$ contiene una variable en un solo lado? Explique su respuesta.
3. Si $1x = \frac{1}{3}$, ¿cuánto vale x ?
4. Si $1x = -\frac{3}{5}$, ¿cuánto vale x ?
5. Si $-x = \frac{1}{2}$, ¿cuánto vale x ?
6. ¿Cuál es el valor de x si $-x = \frac{7}{8}$?
7. ¿Cuánto vale x si $-x = -\frac{3}{5}$?
8. Si $-x = -\frac{4}{9}$, ¿cuánto vale x ?
9. ¿Una ecuación se evalúa o se resuelve? Explique su respuesta.
10. ¿Evaluaría o resolvería una expresión? Explique.
11. a) Escriba con sus propias palabras el procedimiento general para resolver una ecuación en la que la variable aparece en un solo lado del signo de igualdad.
b) Revise nuevamente el procedimiento general para resolver ecuaciones (páginas 123 y 124) para ver si omitió alguno.
12. Cuando se resuelven ecuaciones en las que hay fracciones, ¿cuál es el primer paso del proceso para resolverlas?
13. a) Explique, paso a paso, cómo se resuelve la ecuación $2(3x + 4) = -4$.
b) Solucione la ecuación con los pasos que enlistó en el inciso a).
14. a) Explique, paso a paso, cómo resolver la ecuación $4x - 2(x + 3) = 4$.
b) Resuelva la ecuación mediante los pasos que enlistó en el inciso a).

Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación. Tal vez desee emplear una calculadora para resolver aquellas que contienen números decimales.

- | | | | |
|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 15. $3x + 6 = 12$ | 16. $2x - 4 = 8$ | 17. $-4w - 5 = 11$ | 18. $-4x + 6 = 20$ |
| 19. $5x - 6 = 19$ | 20. $6 - 3x = 18$ | 21. $5x - 2 = 10$ | 22. $-5k - 4 = -19$ |
| 23. $-2t + 9 = 21$ | 24. $20 = 2d + 6$ | 25. $12 - x = 9$ | 26. $-3x - 3 = -12$ |
| 27. $8 + 3x = 19$ | 28. $-2x + 7 = -10$ | 29. $16x + 5 = -14$ | 30. $19 = 25 + 4x$ |
| 31. $-4.2 = 3x + 25.8$ | 32. $-24 + 16x = -24$ | 33. $7r - 16 = -2$ | 34. $-2w + 4 = -8$ |
| 35. $60 = -5s + 9$ | 36. $15 = 7x + 1$ | 37. $-2x - 7 = -13$ | 38. $-2 - x = -12$ |
| 39. $2.3x - 9.34 = 6.3$ | 40. $x + 0.05x = 21$ | 41. $x + 0.07x = 16.05$ | 42. $-2.7 = -1.3 + 0.7x$ |
| 43. $28.8 = x + 1.40x$ | 44. $8.40 = 2.45x - 1.05x$ | 45. $\frac{x - 4}{6} = 9$ | 46. $\frac{m - 6}{5} = 2$ |
| 47. $\frac{d + 3}{7} = 9$ | 48. $\frac{1}{5}(x + 2) = -3$ | 49. $\frac{1}{3}(t - 5) = -6$ | 50. $\frac{2}{3}(n - 3) = 8$ |
| 51. $\frac{3}{4}(x - 5) = -12$ | 52. $\frac{x + 4}{7} = \frac{3}{7}$ | 53. $\frac{1}{4} = \frac{z + 1}{4}$ | 54. $\frac{4x + 5}{6} = \frac{7}{2}$ |
| 55. $\frac{3}{4} = \frac{4m - 5}{6}$ | 56. $\frac{5}{6} = \frac{5t - 4}{2}$ | 57. $4(n + 2) = 8$ | 58. $3(x - 2) = 12$ |
| 59. $5(3 - x) = 15$ | 60. $-2(x - 3) = 26$ | 61. $-4 = -(x + 5)$ | 62. $-3(2 - 3x) = 9$ |
| 63. $12 = 4(x - 3)$ | 64. $-2(x + 8) - 5 = 1$ | 65. $22 = -(3x - 4)$ | |
| 66. $-2 = 5(3x + 1) - 12x$ | 67. $-3r + 4(r + 2) = 11$ | 68. $9 = -2(a - 3)$ | |
| 69. $x - 3(2x + 3) = 11$ | 70. $3(4 - x) + 5x = 9$ | 71. $5x + 3x - 4x - 7 = 9$ | |
| 72. $4(x + 2) = 13$ | 73. $0.7(x - 3) = 1.4$ | 74. $21 + (c - 9) = 24$ | |
| 75. $2.5(4q - 3) = 0.5$ | 76. $0.1(2.4x + 5) = 1.7$ | 77. $3 - 2(x + 3) + 2 = 1$ | |
| 78. $2(3x - 4) - 4x = 12$ | 79. $1 + (x + 3) + 6x = 6$ | 80. $5x - 2x + 7x = -81$ | |
| 81. $4.85 - 6.4x + 1.11 = 22.6$ | 82. $5.76 - 4.24x - 1.9x = 27.864$ | 83. $7 = 8 - 5(m + 3)$ | |

84. $-4 = 3 - 6(t - 5)$
85. $10 = \frac{2s + 4}{5}$
86. $12 = \frac{4d - 1}{3}$
87. $x + \frac{2}{3} = \frac{3}{5}$
88. $n - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
89. $\frac{t}{4} - t = \frac{3}{2}$
90. $n - \frac{n}{3} = \frac{1}{2}$
91. $\frac{3}{7} = \frac{3t}{4} + 1$
92. $\frac{5}{8} = \frac{5t}{6} + 2$
93. $\frac{1}{2}r + \frac{1}{5}r = 7$
94. $\frac{2}{8} + \frac{3}{4} = \frac{w}{5}$
95. $\frac{x}{3} - \frac{3x}{4} = \frac{1}{12}$
96. $\frac{x}{4} - \frac{x}{6} = \frac{1}{4}$
97. $\frac{1}{2}x + 4 = \frac{1}{6}$
98. $\frac{4}{5} + n = \frac{1}{3}$
99. $\frac{4}{5}s - \frac{3}{4}s = \frac{1}{10}$
100. $\frac{2}{3} = \frac{1}{5}(t + 2)$
101. $\frac{4}{9} = \frac{1}{3}(n - 7)$
102. $-\frac{3}{8} = \frac{1}{8} - \frac{2x}{7}$
103. $-\frac{3}{5} = -\frac{1}{9} - \frac{3}{4}x$
104. $-\frac{3}{5} = -\frac{1}{6} - \frac{5}{4}m$

Solución de problemas

105. a) Explique por qué es más fácil resolver la ecuación $3x + 2 = 11$ si primero se resta 2 en ambos lados, en lugar de dividirlos primero entre 3.
b) Resuelva la ecuación.
106. a) Diga por qué es más fácil resolver la ecuación $5x - 3 = 12$ si primero se suma 3 en ambos lados, en vez de primero dividirlos entre 5.
b) Resuelva la ecuación.

Problemas de reto

Para los ejercicios 107 a 109, resuelva cada ecuación.

107. $3(x - 2) - (x + 5) - 2(3 - 2x) = 18$
108. $-6 = -(x - 5) - 3(5 + 2x) - 4(2x - 4)$
109. $4[3 - 2(x + 4)] - (x + 3) = 13$
110. Resuelva la ecuación $\square \odot - \nabla = @$ para $\odot$.



Actividad en grupo

En el capítulo 3 se estudiarán procedimientos para escribir problemas de aplicación como ecuaciones. Ahora se verá una aplicación.

Fiesta de cumpleaños. John Logan compró dos barras grandes de chocolate y una tarjeta de cumpleaños. La tarjeta cuesta \$3. El precio total de los tres artículos fue de \$9. ¿Cuál fue el precio de cada chocolate?

Este problema se representa mediante la ecuación $2x + 3 = 9$ que se emplea para resolverlo. Al resolver la ecuación, encontramos que el precio de cada chocolate (x) es de \$3.

Para los ejercicios 111 y 112, cada miembro del grupo debe hacer los incisos a) y b). Después, todo el grupo hará el inciso c).

- a) Plantee una ecuación que se utilice para resolver el problema.
b) Resuelva la ecuación y responda la pregunta.
c) Compare y revise el trabajo de los demás.
111. **Obsequios** Eduardo Verner compró tres cajas de obsequios. También adquirió papel para envolver regalos y tarjetas de agradecimiento. Si el costo total del papel y las tarjetas fue de \$6, y el pago total fue de \$42, determine el costo de cada caja de obsequios.
112. **Dulces** Mahandi Ison compró tres rollos de dulces de menta y el periódico de la localidad. Si el periódico vale 50 centavos y él pagó \$2.75 en total, ¿cuánto cuesta un rollo de dulces?

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 113. Evalúe $[5(2 - 6) + 3(8 \div 4)]^2$.114. Evalúe $-2x^2 + 3x - 12$ si $x = 5$.

[2.2] 115. Para resolver una ecuación, ¿qué se necesita hacer a la variable?

[2.3] 116. Para solucionar la ecuación $7 = -4x$, ¿se sumaría 4 en ambos lados o se los dividiría entre -4 ? Explique su respuesta.

2.5 SOLUCIÓN DE ECUACIONES LINEALES CON LA VARIABLE EN AMBOS LADOS DE LA ECUACIÓN



- 1 Solucionar ecuaciones con la variable en ambos lados.
- 2 Solucionar ecuaciones que contienen números decimales o fracciones.
- 3 Identificar identidades y contradicciones.

1 Solucionar ecuaciones con la variable en ambos lados

La ecuación $4x + 6 = 2x + 4$ contiene a la variable x en ambos lados del signo de igualdad. Para resolver ecuaciones de este tipo, deben emplearse las propiedades adecuadas para reescribir la ecuación con todos los términos que contienen a la variable en un solo lado del signo de igualdad, y en el otro lado todos los términos que no contengan a la variable. Esto permitirá despejar la variable, que es el objetivo. A continuación se presenta un procedimiento general, similar al que se dio en la sección 2.4, para resolver ecuaciones lineales en las que aparezca la variable en ambos lados del signo de igualdad.

Para resolver ecuaciones lineales con la variable en ambos lados del signo de igualdad

1. Si la ecuación contiene fracciones, multiplique **ambos** lados por el mínimo común denominador. Esto eliminará las fracciones de la ecuación.
2. Aplique la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis.
3. Reduzca los términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad.
4. Utilice la propiedad de la suma para reescribir la ecuación con todos los términos que contienen a la variable en un lado del signo de igualdad, y todos los que no la contengan en el otro. Tal vez sea necesario usar la propiedad de la suma dos veces para lograr lo anterior. En algún momento obtendrá la ecuación de la forma $ax = b$.
5. Utilice la propiedad de la multiplicación para despejar la variable. Esto dará una solución de la forma $x = \text{cierto número}$.
6. Compruebe la solución en la ecuación original.

Los pasos que se enlistan aquí son en esencia los mismos del procedimiento que está en el recuadro de las páginas 123 y 124, excepto porque en el paso 4 quizá sea necesario emplear más de una vez la propiedad de la suma con objeto de obtener una ecuación de la forma $ax = b$.

Recuerde que nuestro objetivo al resolver ecuaciones es despejar la variable, es decir, dejarla sola en un lado de la ecuación.

Considere la ecuación $3x + 4 = x + 12$, que no contiene fracciones ni paréntesis, y no tiene términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad;

por tanto, comenzamos con el paso 4, la propiedad de la suma, que aplicaremos dos veces a fin de obtener una ecuación en la que la variable aparezca en un solo lado del signo de igualdad. Comenzamos restando x en ambos lados para que todos los términos que contienen la variable queden en el lado izquierdo. Esto dará lo siguiente:

Ecuación

$$\begin{aligned}
 3x + 4 &= x + 12 \\
 3x - x + 4 &= x - x + 12 && \text{Propiedad de la suma.} \\
 \text{o } 2x + 4 &= 12 && \text{La variable aparece sólo en el lado izquierdo del signo de igualdad.}
 \end{aligned}$$

Observe que la variable, x , aparece sólo de un lado de la ecuación. Sin embargo, el $+4$ todavía está en el mismo lado del signo de igualdad en que está $2x$. Emplearemos nuevamente la propiedad de la suma para hacer que el término con la variable quede sólo en un lado de la ecuación. Restando 4 de ambos lados obtenemos $2x = 8$, que es una ecuación de la forma $ax = b$.

Ecuación

$$\begin{aligned}
 2x + 4 &= 12 \\
 2x + 4 - 4 &= 12 - 4 && \text{Propiedad de la suma.} \\
 2x &= 8 && \text{Ahora, el término con } x \text{ está despejado.}
 \end{aligned}$$

Ahora que el $2x$ quedó aislado en un lado de la ecuación, empleamos la propiedad de la multiplicación, paso 5, para despejar la variable x , para lo cual dividimos ambos lados entre 2 y así resolvemos la ecuación.

$$\begin{aligned}
 2x &= 8 \\
 \frac{2x}{2} &= \frac{8}{2} && \text{Propiedad de la multiplicación.} \\
 x &= 4 && \text{La } x \text{ está despejada.}
 \end{aligned}$$

La solución de la ecuación es 4.

Ejemplo 1

Solución

Resolver la ecuación $4x + 6 = 2x + 4$.

Recuerde que nuestro objetivo es que todos los términos que contienen la variable queden en un lado del signo de igualdad, y todos los términos que no la contienen se queden del otro lado. Los términos con la variable pueden agruparse en cualquiera de los dos lados del signo de igualdad, así como también podemos utilizar muchos métodos para despejar la variable; aquí ilustraremos dos de estos métodos. En el método 1 dejaremos la variable del lado izquierdo de la ecuación, en el método 2, del lado derecho. En ambos métodos seguiremos los pasos del recuadro de la página 133. Como esta ecuación no contiene fracciones o paréntesis, y no hay términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad, comenzamos con el paso 4.

Método 1: Despejar la variable en el lado izquierdo

$$\begin{aligned}
 4x + 6 &= 2x + 4 \\
 \text{Paso 4 } 4x - 2x + 6 &= 2x - 2x + 4 && \text{Restar 6 en ambos lados.} \\
 2x + 6 &= 4 \\
 \text{Paso 4 } 2x + 6 - 6 &= 4 - 6 && \text{Dividir ambos lados entre 2.} \\
 2x &= -2
 \end{aligned}$$

Paso 5
$$\frac{2x}{2} = \frac{-2}{2}$$

$$x = -1$$
 Dividir ambos lados entre 2.

Método 2: Despejar la variable en el lado derecho

$$4x + 6 = 2x + 4$$

Paso 4
$$4x - 4x + 6 = 2x - 4x + 4$$
 Restar 4x en ambos lados.

$$6 = -2x + 4$$

Paso 4
$$6 - 4 = -2x + 4 - 4$$
 Restar 4 en ambos lados.

$$2 = -2x$$

Paso 5
$$\frac{2}{-2} = \frac{-2x}{-2}$$
 Dividir ambos lados entre -2.

$$-1 = x$$

Obtenemos la misma respuesta si despejamos la variable del lado izquierdo o del derecho. Sin embargo, con el método 2 es necesario dividir ambos lados de la ecuación entre un número negativo.

Paso 6 Comprobación:
$$4x + 6 = 2x + 4$$

$$4(-1) + 6 \stackrel{?}{=} 2(-1) + 4$$

$$-4 + 6 \stackrel{?}{=} -2 + 4$$

$$2 = 2$$
 Verdadero.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 19

Ejemplo 2 Resuelva la ecuación $2x - 3 - 5x = 13 + 4x - 2$.

Solución Agrupamos los términos que contienen la variable en el lado derecho de la ecuación a fin de producir un coeficiente positivo para x . Como hay términos semejantes *en el mismo lado del signo de igualdad*, comenzaremos por reducirlos.

Paso 3
$$2x - 3 - 5x = 13 + 4x - 2$$

$$-3x - 3 = 4x + 11$$
 Se reducen los términos semejantes.

Paso 4
$$-3x + 3x - 3 = 4x + 3x + 11$$
 Sumar 3x en ambos lados.

$$-3 = 7x + 11$$

Paso 4
$$-3 - 11 = 7x + 11 - 11$$
 Restar 11 en ambos lados.

$$-14 = 7x$$

Paso 5
$$\frac{-14}{7} = \frac{7x}{7}$$
 Dividir ambos lados entre 7.

$$-2 = x$$

Paso 6 Comprobación:
$$2x - 3 - 5x = 13 + 4x - 2$$

$$2(-2) - 3 - 5(-2) \stackrel{?}{=} 13 + 4(-2) - 2$$

$$-4 - 3 + 10 \stackrel{?}{=} 13 - 8 - 2$$

$$-7 + 10 \stackrel{?}{=} 5 - 2$$

$$3 = 3$$
 Verdadero.

Como la comprobación se cumple, la solución es -2 .

La solución al ejemplo 2 se resume como sigue:

$$\begin{aligned}
 2x - 3 - 5x &= 13 + 4x - 2 \\
 -3x - 3 &= 4x + 11 && \text{Se redujeron términos semejantes.} \\
 -3 &= 7x + 11 && \text{Se sumó } 3x \text{ en ambos lados.} \\
 -14 &= 7x && \text{Se restó } 11 \text{ en ambos lados.} \\
 -2 &= x && \text{Se dividieron ambos lados entre } 7.
 \end{aligned}$$

Resolvimos el ejemplo 2 moviendo los términos con la variable al lado derecho de la ecuación. Ahora, hay que resolver nuevamente el problema, esta vez moviendo los términos con la variable al lado izquierdo. Debe obtener la misma respuesta.

Ejemplo 3 Solución

Resuelva la ecuación $2(p + 3) = -3p + 10$.

$$\begin{aligned}
 &2(p + 3) = -3p + 10 \\
 \text{Paso 2} \quad &2p + 6 = -3p + 10 && \text{Se usó la propiedad distributiva.} \\
 \text{Paso 4} \quad &2p + 3p + 6 = -3p + 3p + 10 && \text{Sumar } 3p \text{ en ambos lados.} \\
 &5p + 6 = 10 \\
 \text{Paso 4} \quad &5p + 6 - 6 = 10 - 6 && \text{Restar } 6 \text{ en ambos lados.} \\
 &5p = 4 \\
 \text{Paso 5} \quad &\frac{5p}{5} = \frac{4}{5} && \text{Dividir ambos lados entre } 5. \\
 &p = \frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

La solución del ejemplo 4 se resume como sigue:

$$\begin{aligned}
 2(p + 3) &= -3p + 10 \\
 2p + 6 &= -3p + 10 && \text{Se usó la propiedad distributiva.} \\
 5p + 6 &= 10 && \text{Se sumó } 3p \text{ en ambos lados.} \\
 5p &= 4 && \text{Se restó } 6 \text{ en ambos lados.} \\
 p &= \frac{4}{5} && \text{Se dividieron ambos lados entre } 5.
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 27



SUGERENCIA

Después de aplicar la propiedad distributiva en el ejemplo 3, obtuvimos la ecuación $2p + 6 = -3p + 10$. Luego había que decidir si agrupar los términos con la variable en el lado izquierdo o en el derecho del signo de igualdad. Si queremos que la suma de los términos que contienen a la variable sea positiva, usamos la propiedad de la suma para eliminar la variable que tenga el coeficiente numérico *más pequeño* de un lado de la ecuación. Como -3 es más pequeño que 2 , sumamos $3p$ en ambos lados, lo que eliminó $-3p$ del lado derecho e hizo que la suma de los términos que contienen a la variable quedasen del izquierdo con signo positivo ($5p$).

Ejemplo 4 Solución

Resuelva la ecuación $2(x - 5) + 3 = 3x + 9$.

$$\begin{aligned}
 &2(x - 5) + 3 = 3x + 9 \\
 \text{Paso 2} \quad &2x - 10 + 3 = 3x + 9 && \text{Se empleó la propiedad distributiva.} \\
 \text{Paso 3} \quad &2x - 7 = 3x + 9 && \text{Se redujeron los términos semejantes.} \\
 \text{Paso 4} \quad &-7 = x + 9 && \text{Se restó } 2x \text{ en ambos lados.} \\
 \text{Paso 4} \quad &-16 = x && \text{Se restó } 9 \text{ en ambos lados.}
 \end{aligned}$$



Ejemplo 5 Resolver la ecuación $7 - 2x + 5x = -2(-3x + 4)$.**Solución**

$$7 - 2x + 5x = -2(-3x + 4)$$

Paso 2 $7 - 2x + 5x = 6x - 8$

Se usó la propiedad distributiva.

Paso 3 $7 + 3x = 6x - 8$

Se redujeron los términos semejantes.

Paso 4 $7 = 3x - 8$

Se restó $3x$ en ambos lados.

Paso 4 $15 = 3x$

Se sumó 8 en ambos lados.

Paso 5 $5 = x$

*Se dividieron ambos lados entre 3.***AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 63**

La solución es 5.



2 Solucionar ecuaciones que contienen números decimales o fracciones

Ahora resolveremos una ecuación que contiene números decimales. Como explicamos en la sección anterior, esa clase de ecuaciones se resuelven mediante diversos procedimientos. En la solución del ejemplo 6 se ilustrarán dos de ellos.

Ejemplo 6 Resuelva la ecuación $5.74x + 5.42 = 2.24x - 9.28$.**Solución**

Método 1 En primer lugar, observe que no hay términos semejantes en el mismo lado del signo de igualdad que pudieran reducirse. Agrupamos en el lado izquierdo los términos que contienen la variable.

$$5.74x + 5.42 = 2.24x - 9.28$$

Paso 4 $5.74x - 2.24x + 5.42 = 2.24x - 2.24x - 9.28$

Restar $2.24x$ en ambos lados.

$$3.50x + 5.42 = -9.28$$

Paso 4 $3.50x + 5.42 - 5.42 = -9.28 - 5.42$

Restar 5.42 en ambos lados.

$$3.50x = -14.7$$

Paso 5 $\frac{3.50x}{3.50} = \frac{-14.7}{3.50}$

Dividir ambos lados entre 3.5.

$$x = -4.20$$

Método 2 En la sección anterior introdujimos un procedimiento para eliminar, de las ecuaciones, números decimales; si están dados en décimas, multiplicamos ambos lados de la ecuación por 10. Si están en centésimas, multiplicamos ambos lados por 100, y así sucesivamente. Como la ecuación de que se trata tiene números en centésimas, multiplicaremos por 100.

$$5.74x + 5.42 = 2.24x - 9.28$$

$$100(5.74x + 5.42) = 100(2.24x - 9.28)$$

Multiplicar los dos lados por 100.

$$100(5.74x) + 100(5.42) = 100(2.24x) - 100(9.28)$$

Propiedad distributiva.

$$574x + 542 = 224x - 928$$

Paso 4 $574x + 542 - 542 = 224x - 928 - 542$

Restar 542 en ambos lados.

$$574x = 224x - 1470$$

Paso 4 $574x - 224x = 224x - 224x - 1470$

Restar $224x$ en ambos lados.

$$350x = -1470$$

Paso 5
$$\frac{350x}{350} = \frac{-1470}{350}$$

$$x = -4.20$$
 Dividir los dos lados entre 350.

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 25**

Observe que obtenemos la misma respuesta con cualquier método. Usted puede utilizar el que más le agrade para resolver ecuaciones de este tipo. 

Ahora veremos algunas ecuaciones que contienen fracciones en ambos lados del signo de igualdad.

Ejemplo 7 Resuelva la ecuación $\frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a + \frac{1}{5}$.

Solución Paso 1 En esta ecuación la variable es a . El mínimo común denominador es 20. Comenzamos multiplicando ambos lados de la ecuación por el mcd.

$$\frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a + \frac{1}{5}$$

Paso 1 $20\left(\frac{1}{2}a\right) = 20\left(\frac{3}{4}a + \frac{1}{5}\right)$ *Multiplicar ambos lados por el mcd, 20.*

Paso 2 $10a = \overset{5}{20}\left(\frac{3}{\underset{4}{4}}a\right) + \overset{4}{20}\left(\frac{1}{\underset{5}{5}}\right)$ *Propiedad distributiva.*
 $10a = 15a + 4$

Paso 4 $-5a = 4$ *Se restó 15a en ambos lados.*

Paso 5 $a = -\frac{4}{5}$ *Se dividieron ambos lados entre -5.*

Paso 6 **Comprobación:** $\frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a + \frac{1}{5}$

$$\frac{1}{2}\left(-\frac{4}{5}\right) \stackrel{?}{=} \frac{3}{4}\left(-\frac{4}{5}\right) + \frac{1}{5}$$

$$-\frac{2}{5} \stackrel{?}{=} -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}$$

$$-\frac{2}{5} = -\frac{2}{5}$$
 Verdadero.

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 51**

La solución de la ecuación es $-\frac{4}{5}$.



SUGERENCIA

La ecuación del ejemplo 7, $\frac{1}{2}a = \frac{3}{4}a + \frac{1}{5}$, hubiera podido darse como $\frac{a}{2} = \frac{3a}{4} + \frac{1}{5}$ debido a que $\frac{1}{2}a$ es lo mismo que $\frac{a}{2}$, y $\frac{3}{4}a$ lo mismo que $\frac{3a}{4}$. Usted habría resuelto la ecuación $\frac{a}{2} = \frac{3a}{4} + \frac{1}{5}$ de la misma forma que la del ejemplo 7. Comenzaría por multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd, 20.

Ejemplo 8 Resuelva la ecuación $\frac{x}{4} + 3 = 2(x - 2)$.

Solución Comience por multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd, 4.

$$\begin{aligned}\frac{x}{4} + 3 &= 2(x - 2) \\ 4\left(\frac{x}{4} + 3\right) &= 4[2(x - 2)] && \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, 4.} \\ 4\left(\frac{x}{4}\right) + 4(3) &= 4[2(x - 2)] && \text{Propiedad distributiva (se usó en el lado izquierdo).} \\ x + 12 &= 8(x - 2) \\ x + 12 &= 8x - 16 && \text{Propiedad distributiva (se usó en el lado derecho).} \\ 12 &= 7x - 16 && \text{Se restó } x \text{ en ambos lados.} \\ 28 &= 7x && \text{Se sumó 16 en ambos lados.} \\ 4 &= x && \text{Se dividieron ambos lados entre 7.}\end{aligned}$$

La comprobación mostrará que la solución es 4.



SUGERENCIA

Observe que la ecuación del ejemplo 8 tenía *dos términos* en el lado izquierdo del signo de igualdad, $\frac{x}{4}$ y 3; y sólo *un término* del lado derecho, $2(x - 2)$. Por tanto, después de multiplicar los dos lados de la ecuación por 4, el siguiente paso fue utilizar la propiedad distributiva en el lado izquierdo

Ejemplo 9 Resuelva la ecuación $\frac{1}{2}(2x + 3) = \frac{2}{3}(x - 6) + 4$.

Observe que esta ecuación contiene un término en el lado izquierdo del signo de igualdad y dos en el derecho.

Solución Se multiplican ambos lados de la ecuación por el mcd, 6.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(2x + 3) &= \frac{2}{3}(x - 6) + 4 \\ 6 \cdot \frac{1}{2}(2x + 3) &= 6\left[\frac{2}{3}(x - 6) + 4\right] && \text{Multiplicar los dos lados por el mcd, 6.} \\ 3(2x + 3) &= 6 \cdot \frac{2}{3}(x - 6) + 6 \cdot 4 && \text{Propiedad distributiva (se usó en el lado derecho).} \\ 6x + 9 &= 4(x - 6) + 24 && \text{Propiedad distributiva (se usó en el lado izquierdo).} \\ 6x + 9 &= 4x - 24 + 24 && \text{Propiedad distributiva (se usó en el lado derecho).} \\ 6x + 9 &= 4x && \text{Se redujeron términos semejantes.} \\ 9 &= -2x && \text{Se restó } 6x \text{ en ambos lados.} \\ -\frac{9}{2} &= x && \text{Se dividieron ambos lados entre } -2.\end{aligned}$$

Comprobación: En la ecuación, se sustituye con $-\frac{9}{2}$ cada x .

$$\frac{1}{2}(2x + 3) = \frac{2}{3}(x - 6) + 4$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[2\left(-\frac{9}{2}\right) + 3\right] &\stackrel{?}{=} \frac{2}{3}\left(-\frac{9}{2} - 6\right) + 4 \\
\frac{1}{2}(-9 + 3) &\stackrel{?}{=} \frac{2}{3}\left(-\frac{9}{2} - \frac{12}{2}\right) + 4 \\
\frac{1}{2}(-6) &\stackrel{?}{=} \frac{2}{3}\left(-\frac{21}{2}\right) + 4 \\
-3 &\stackrel{?}{=} -7 + 4 \\
-3 &= -3
\end{aligned}$$

Verdadero.

Por tanto, la solución es $-\frac{9}{2}$.



AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 75

En el ejemplo 9, la ecuación dada podría haberse representado como $\frac{2x+3}{2} = \frac{2(x-6)}{3} + 4$. Si la ecuación se hubiera dado en esta forma, el primer paso para encontrar la solución habría sido multiplicar sus dos lados por el mcd, 6. Debido a que ésta sólo es otra manera de escribir la ecuación del ejemplo 9, la respuesta sería $-\frac{9}{2}$.

En la sección 6.6 se estudiará más la solución de ecuaciones que contienen fracciones.

3 Identificar identidades y contradicciones

Hasta este momento, todas las ecuaciones que hemos resuelto han tenido una solución única. Este tipo de ecuaciones se conoce como **ecuaciones condicionales**, ya que son verdaderas sólo en condiciones específicas. Algunas ecuaciones, como las del ejemplo 10, son verdaderas para todas las instancias de x ; a estas ecuaciones se les denomina **identidades**. Las de la tercera clase, como las del ejemplo 11, no tienen solución y reciben el nombre de **contradicción**.

Ejemplo 10

Solución

Resuelva la ecuación $2x + 6 = 2(x + 3)$.

$$\begin{aligned}
2x + 6 &= 2(x + 3) \\
2x + 6 &= 2x + 6
\end{aligned}$$

Como la misma expresión aparece en ambos lados del signo de igualdad, la proposición es verdadera para todas las instancias de x . Si continuamos resolviendo esta ecuación obtendremos

$$\begin{aligned}
2x &= 2x && \text{Se restó 6 en ambos lados.} \\
0 &= 0 && \text{Se restó } 2x \text{ en ambos lados.}
\end{aligned}$$

Nota: el proceso de solución puede terminar en $2x + 6 = 2x + 6$. Como un lado es idéntico al otro, la ecuación es verdadera para todas las instancias de x . *Por lo tanto, las soluciones de la ecuación son todos los números reales. Al resolver una ecuación, como la del ejemplo 10, que siempre es verdadera, la respuesta se escribe como “todos los números reales”.*



Ejemplo 11

Solución

Resuelva la ecuación $-3x + 4 + 5x = 4x - 2x + 5$.

$$\begin{aligned}
-3x + 4 + 5x &= 4x - 2x + 5 \\
2x + 4 &= 2x + 5 && \text{Se redujeron los términos semejantes.}
\end{aligned}$$

$$2x - 2x + 4 = 2x - 2x + 5 \quad \text{Se resta } 2x \text{ en ambos lados.}$$

$$4 = 5 \quad \text{Falso.}$$

Al resolver una ecuación, si se obtiene una proposición que es obviamente falsa, como en este ejemplo, la ecuación *no tiene solución*. Ninguna sustitución de x hará que sea una proposición verdadera. **Al resolver una ecuación como la del ejemplo 11, que nunca es verdad, la respuesta se escribe como “sin solución”.** Una respuesta que se deje en blanco tal vez se tomará como errónea. 

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 31

SUGERENCIA

Algunos estudiantes comienzan a resolver ecuaciones en forma correcta, pero no llegan a la solución. En ocasiones no están seguros de si lo que hacen es correcto y se rinden por falta de confianza. Usted debe tener confianza en sí mismo. Mientras siga el procedimiento de la página 133, llegará a la solución correcta aunque tenga que realizar varios pasos. Recuerde dos aspectos importantes: (1) nuestro objetivo es despejar la variable, y (2) cualquier cosa que haga en un lado de la ecuación también debe hacerla en el otro. Es decir, debe tratar ambos lados de la ecuación por igual.

Conjunto de ejercicios 2.5

Ejercicios conceptuales

1. a) Con sus propias palabras, escriba el procedimiento general para resolver una ecuación sin fracciones y con la variable en ambos lados.
b) Consulte la página 133 para saber si omitió algunos pasos.
2. ¿Qué es una ecuación condicional?
3. a) ¿Qué es una identidad?
b) ¿Cuál es la solución de la ecuación $3x + 5 = 3x + 5$?
4. Al resolver una ecuación, ¿cómo sabe si se trata de una identidad?
5. Explique por qué la ecuación $x + 5 = x + 5$ debe ser una identidad.
6. a) ¿Qué es una contradicción?
b) ¿Cuál es la solución de una contradicción?
7. Al resolver una ecuación, ¿cómo sabe si no tiene soluciones reales?
8. Explique por qué la ecuación $x + 5 = x + 4$ debe ser una contradicción.
9. a) Explique, paso a paso, cómo resolver la ecuación $4(x + 3) = 6(x - 5)$.
b) Resuelva la ecuación de acuerdo con los pasos que enlistó en el inciso a).
10. a) Explique, paso a paso, cómo se soluciona la ecuación $4x + 3(x + 2) = 5x - 10$.
b) Resuelva la ecuación según los pasos que enlistó en el inciso a).

Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación.

11. $3x = -2x + 15$

14. $3a = 4a + 8$

17. $21 - 6p = 3p - 2p$

20. $-5x = -4x + 9$

23. $9 - 0.5x = 4.5x + 8.5$

26. $8.71 - 2.44x = 11.02 - 5.74x$

12. $x + 4 = 2x - 7$

15. $5x + 3 = 6$

18. $8 - 3x = 4x + 50$

21. $6 - 2y = 9 - 8y + 6y$

24. $124.8 - 9.4x = 4.8x + 32.5$

27. $5x + 3 = 2(x + 6)$

13. $-4x + 10 = 6x$

16. $-6x = 2x + 16$

19. $2x - 4 = 3x - 6$

22. $-4 + 2y = 2y - 6 + y$

25. $0.62x - 0.65 = 9.75 - 2.63x$

28. $x - 14 = 3(x + 2)$

29. $x - 25 = 12x + 9 + 3x$

32. $4r = 10 - 2(r - 4)$

35. $5 - 3(2t - 5) = 3t + 13$

38. $\frac{b}{16} = \frac{b - 6}{4}$

41. $\frac{5}{2} - \frac{x}{3} = 3x$

44. $\frac{3}{4}x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x$

47. $2(x + 4) = 4x + 3 - 2x + 5$

49. $5(3n + 3) = 2(5n - 4) + 6n$

51. $-(3 - p) = -(2p + 3)$

53. $-(x + 4) + 5 = 4x + 1 - 5x$

55. $35(2x - 1) = 7(x + 4) + 3x$

57. $0.4(x + 0.7) = 0.6(x - 4.2)$

59. $\frac{3}{5}x + 4 = \frac{1}{5}x + 5$

61. $\frac{3}{4}(2x - 4) = 4 - 2x$

63. $-(x - 5) + 2 = 3(4 - x) + 5x$

65. $3(x - 6) - 4(3x + 1) = x - 22$

67. $5 + 2x = 6(x + 1) - 5(x - 3)$

69. $7 - (-y - 5) = 2(y + 3) - 6(y + 1)$

71. $\frac{1}{2}(2d + 4) = \frac{1}{3}(4d - 4)$

73. $\frac{3(2r - 5)}{5} = \frac{3r - 6}{4}$

75. $\frac{2}{7}(5x + 4) = \frac{1}{2}(3x - 4) + 1$

77. $\frac{a - 5}{2} = \frac{3a}{4} + \frac{a - 25}{6}$

30. $5y + 6 = 2y + 3 - y$

33. $-(w + 2) = -6w + 32$

36. $4(2x - 3) = -2(3x + 16)$

39. $6 - \frac{x}{4} = \frac{x}{8}$

42. $\frac{x}{4} - 3 = -2x$

45. $0.1(x + 10) = 0.3x - 4$

31. $2(x - 2) = 4x - 6 - 2x$

34. $7(-3m + 5) = 3(10 - 6m)$

37. $\frac{a}{5} = \frac{a - 3}{2}$

40. $\frac{n}{10} = 9 - \frac{n}{5}$

43. $\frac{5}{8} + \frac{1}{4}a = \frac{1}{2}a$

46. $5(3.2x - 3) = 2(x - 4)$

48. $3(y - 1) + 9 = 8y + 6 - 5y$

50. $-4(-3z - 5) = -(10z + 8) - 2z$

52. $12 - 2x - 3(x + 2) = 4x + 6 - x$

54. $18x + 3(4x - 9) = -6x + 81$

56. $10(x - 10) + 5 = 5(2x - 20)$

58. $0.5(6x - 8) = 1.4(x - 5) - 0.2$

60. $\frac{3}{5}x - 2 = x + \frac{1}{3}$

62. $\frac{1}{5}(w + 2) = w + 4$

64. $3(x - 4) = 2(x - 8) + 5x$

66. $-2(-3x + 5) + 6 = 4(x - 2)$

68. $4 - (6x + 6) = -(-2x + 10)$

70. $12 - 6x + 3(2x + 3) = 2x + 5$

72. $\frac{3}{5}(x - 6) = \frac{2}{3}(3x - 5)$

74. $\frac{3(x - 4)}{4} = \frac{5(2x - 3)}{3}$

76. $\frac{5}{12}(x + 2) = \frac{2}{3}(2x + 1) + \frac{1}{6}$

78. $\frac{a - 7}{3} = \frac{a + 5}{2} - \frac{7a - 1}{6}$

Solución de problemas

79. a) Construya una *ecuación condicional* que contenga tres términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y dos en el derecho.
 b) Explique cómo se sabe que la respuesta del inciso a) es una ecuación condicional.
 c) Resuelva la ecuación.
80. a) Construya una *ecuación condicional* que contenga dos términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y tres en el derecho.
 b) Diga cómo se sabe que la respuesta del inciso a) es una ecuación condicional.
 c) Resuelva la ecuación.
81. a) Construya una *identidad* que contenga tres términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y dos en el derecho.
 b) ¿Cómo se sabría que la respuesta del inciso a) es una identidad?
 c) ¿Cuál es la solución de la ecuación?
82. a) Construya una *identidad* en la que haya dos términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y tres en el derecho.
 b) Explique cómo se sabría que la respuesta del inciso a) es una identidad.
 c) ¿Cuál es la solución de la ecuación?

83. a) Construya una *contradicción* que contenga tres términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y dos en el derecho.
 b) Explique cómo se sabría si la respuesta al inciso a) es una contradicción.
 c) ¿Cuál es la solución de la ecuación?
84. a) Construya una *contradicción* que contenga tres términos en el lado izquierdo del signo de igualdad y cuatro en el derecho.
 b) Explique cómo saber que la respuesta al inciso a) es una contradicción.
 c) ¿Cuál es la solución de la ecuación?

Problemas de reto

85. Resuelva la ecuación $5* - 1 = 4* + 5$ para $*$.
 86. Resuelva la ecuación $2\triangle - 4 = 3\triangle + 5 - \triangle$ para $\triangle$.
 87. Resuelva la ecuación $3\odot - 5 = 2\odot - 5 + \odot$ para $\odot$.
 88. Resuelva la ecuación $-2(x + 3) + 5x = 3(4 - 2x) - (x + 2)$.
 89. Resuelva la ecuación $4 - [5 - 3(x + 2)] = x - 3$.



Actividad en grupo

Como grupo analicen y respondan el ejercicio 90. En el capítulo siguiente se estudiarán procedimientos para escribir problemas de aplicación como ecuaciones. Ahora se obtendrá cierta práctica.

90. **Barras de chocolate.** Considere la descripción del siguiente problema. Mary Kay compró dos barras grandes de chocolate. El costo total de los dos artículos fue igual al costo de uno de ellos más \$6. Determinen el costo de una barra.
- a) Cada miembro del grupo: represente este problema como ecuación, con la variable x .
 b) Cada miembro del grupo: resuelva la ecuación que se planteó en el inciso a).
 c) Como grupo, comprueben la ecuación y la respuesta para estar seguros de que tiene sentido.

Ejercicios de repaso acumulativo

- [1.5] 91. Evalúe a) $|4|$ b) $|-7|$ c) $|0|$.
 [1.9] 92. Evalúe $\left(\frac{2}{3}\right)^5$ con la calculadora.
 [2.1] 93. Explique la diferencia entre factores y términos.
 94. Simplifique la expresión $2(x - 3) + 4x - (4 - x)$.
 [2.4] 95. Resuelva $2(x - 3) + 4x - (4 - x) = 0$.
 96. Resuelva $(x + 4) - (4x - 3) = 16$.

2.6 RAZONES Y PROPORCIONES



- 1 Entender las razones.
- 2 Resolver proporciones mediante productos cruzados.
- 3 Resolver aplicaciones.
- 4 Usar proporciones para convertir unidades.
- 5 Emplear proporciones para solucionar problemas que involucran figuras semejantes.

1 Entender las razones

Una **razón** es un cociente de dos cantidades. Las razones proporcionan una manera de comparar dos números o cantidades. La razón del número a al número b se escribe así:

$$a \text{ es a } b, \quad a:b, \quad \text{o bien} \quad \frac{a}{b}$$

donde a y b reciben el nombre de **términos de la razón**.

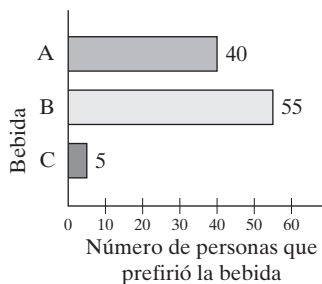
Ejemplo 1

FIGURA 2.2

Prueba de degustación En diversos centros comerciales, una empresa de bebidas llevó a cabo una prueba de tres bebidas, A, B y C, respectivamente. El propósito de la prueba era determinar cuál de las tres nuevas bebidas se lanzaría al mercado. Se pidió a los participantes en la Plaza de América que probaran las tres e indicaran cuál había sido su favorita. En la figura 2.2 se muestran los resultados de la prueba.

a) Encuentre la razón del número de personas que seleccionó B, a aquellos que seleccionaron A.

b) Halle la razón del número de personas que seleccionó C al número total que participó en el sondeo.

Solución Se empleará nuestro procedimiento de cinco pasos para resolver problemas.

a) **Entender y traducir** La razón que se busca es

Número que seleccionó B : Número que seleccionó A

Calcular Sustituimos los valores apropiados en la razón; esto da

$$55:40$$

Ahora, simplificamos dividiendo cada número entre 5, el número mayor que divide ambos términos de la razón. El resultado es

$$11:8$$

Revisar y responder La división es correcta. La razón es 11:8.

b) Usamos el mismo procedimiento que en el inciso **a)**. Cinco personas seleccionaron la bebida C. Se sondeó a $40 + 55 + 5$, es decir 100, personas. Así, la razón es 5:100, que se simplifica como

$$1:20$$



**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 17**

La respuesta al inciso **a)** del ejemplo 1 también hubiera podido escribirse como $\frac{11}{8}$, o bien 11 es a 8. La respuesta al inciso **b)** también hubiera podido escribirse como $\frac{1}{20}$, o 1 es a 20.

Ejemplo 2

Nivel de colesterol Hay dos tipos de colesterol: las lipoproteínas de densidad baja (LDL, que se considera el tipo perjudicial de colesterol) y las lipoproteínas de densidad alta (HDL, que se considera el tipo de colesterol saludable). Algunos médicos recomiendan que la razón de colesterol de baja densidad al de alta densidad, sea menor o igual a 4:1. La prueba del Sr. Suárez mostró que su nivel de colesterol de densidad baja fue de 167 miligramos por decilitro, y el de densidad alta fue de 40 miligramos por decilitro. ¿La razón del Sr. Suárez, de colesterol de densidad baja al de densidad alta es menor o igual que la razón recomendable de 4:1?

Solución

Entender Necesitamos determinar si la razón de colesterol de densidad baja del señor Suárez, al de densidad alta es menor o igual de 4:1.

Traducir La razón del Sr. Suárez de colesterol de baja densidad al de alta, es de 167:40. Para hacer que el segundo término sea igual a 1, dividimos ambos términos de la razón entre el segundo, que es 40.

Calcular

$$\frac{167}{40} : \frac{40}{40}$$

o bien $4.175:1$

Revisar y responder La división es correcta. Por tanto, la razón del Sr. Suárez no es menor ni igual a la deseable de 4:1.

**Ejemplo 3**

Mezcla de aceite y gasolina Ciertos equipos de potencia, como sierras de cadena y calentadores, utilizan una mezcla de gasolina y aceite para el funcionamiento de

su motor. Las instrucciones para una sierra en particular indican que debe mezclarse 5 galones de gasolina con 40 onzas de aceite especial, para obtener la mezcla adecuada. Encuentre la razón de gasolina a aceite de la mezcla apropiada.

Solución

Entender Para expresar estas cantidades como una razón, ambas deben estar en las mismas unidades. Podemos convertir 5 galones a onzas o bien 40 onzas a galones.

Traducir Cambiaremos los 5 galones a onzas. Como en un galón hay 128 onzas, 5 galones de gasolina son iguales a $5(128)$, o 640 onzas. La razón que se busca es

onzas de gasolina : onzas de aceite

Calcular

640 : 40

o bien 16 : 1 *Dividir ambos términos entre 40, para simplificar.*

Revisar y contestar La simplificación es correcta. La razón apropiada de gasolina a aceite para esta sierra es de 16:1. 

Ejemplo 4

Razón de engranes La *razón de engranes*, para dos de ellos, se define como

$$\text{razón de engranes} = \frac{\text{número de dientes en el engrane impulsor}}{\text{número de dientes en el engrane impulsado}}$$

Determine la razón de los engranes que se ilustran en la figura 2.3.

Solución Entender y traducir Para encontrar la razón de engranes es necesario sustituir los valores apropiados.

Calcular

$$\text{razón de engranes} = \frac{\text{número de dientes en el engrane impulsor}}{\text{número de dientes en el engrane impulsado}} = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$$

Por tanto, la razón de engranes es de 15:2. Por lo general, las razones de engranes se expresan como alguna cantidad a 1. Si dividimos ambos términos de la razón entre el segundo número, obtendremos una razón de cierto número a 1. Dividimos tanto 15 como 2 entre 2 y obtenemos una razón de engranes de 7.5:1.

Revisar y responder La razón de engranes es de 7.5:1. Esto significa que mientras el engrane impulsor gira una vez, el engrane impulsado lo hace 7.5 veces (una razón de engranes que es común en un auto de pasajeros en primera velocidad es de 3.545:1). 

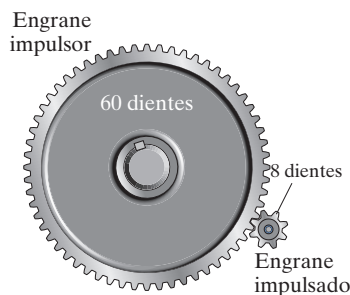


FIGURA 2.3

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 27

2 Resolver proporciones mediante productos cruzados

Una **proporción** es un tipo especial de ecuación. Es una proposición de igualdad entre dos razones. Una forma de denotar una proporción es $a:b = c:d$, que se lee “ a es a b como c es a d ”. En este texto escribimos las proporciones como

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

a y d son los **extremos** de la proporción, mientras que b y c son los **medios**. En las secciones 2.4 y 2.5 se resolvieron ecuaciones que contenían fracciones multiplicando ambos lados de la ecuación por el mcd para eliminar las fracciones. Por ejemplo, para la proporción

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= \frac{35}{15} \\ 15\left(\frac{x}{3}\right) &= 15\left(\frac{35}{15}\right) && \text{Multiplicar ambos lados} \\ 5x &= 35 && \text{por el mcd, que es 15.} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

Otro método que se utiliza para resolver las proporciones es el de los **productos cruzados**. Este proceso arroja los mismos resultados que multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd. Sin embargo, muchos estudiantes prefieren usar los productos cruzados porque de ese modo no tienen que determinar el mcd de las fracciones, y luego multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd.

Productos cruzados

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } ad = bc.$$

Observe que *el producto de los medios es igual al producto de los extremos*.

Si se conocen tres de las cuatro cantidades de una proporción, es posible encontrar la cuarta con facilidad.

Ejemplo 5 Resuelva $\frac{x}{3} = \frac{35}{15}$ mediante los productos cruzados.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{x}{3} &= \frac{35}{15} \\ x \cdot 15 &= 3 \cdot 35 \\ 15x &= 105 \\ x &= \frac{105}{15} = 7\end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned}\frac{x}{3} &= \frac{35}{15} \\ \frac{7}{3} &\stackrel{?}{=} \frac{35}{15} \\ \frac{7}{3} &= \frac{7}{3} \quad \text{Verdadero.}\end{aligned}$$



Antes de que se introdujeran los productos cruzados, se resolvió la proporción $\frac{x}{3} = \frac{35}{15}$ multiplicando ambos lados de la ecuación por 15. Observe que en cada caso se obtuvo la misma solución, 7. Cuando se resuelve una ecuación con productos cruzados, en realidad se está multiplicando ambos lados por el producto de los dos denominadores, y luego se dividen los factores comunes. Sin embargo, este proceso no se demuestra.

Ejemplo 6 Resuelva $\frac{-8}{3} = \frac{64}{x}$ para x , mediante productos cruzados.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{-8}{3} &= \frac{64}{x} \\ -8 \cdot x &= 3 \cdot 64 \\ -8x &= 192 \\ \frac{-8x}{-8} &= \frac{192}{-8} \\ x &= -24\end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned}\frac{-8}{3} &= \frac{64}{x} \\ \frac{-8}{3} &\stackrel{?}{=} \frac{64}{-24} \\ \frac{-8}{3} &\stackrel{?}{=} \frac{8}{-3} \\ \frac{-8}{3} &= \frac{-8}{3} \quad \text{Verdadero.}\end{aligned}$$



3 Resolver aplicaciones

Es frecuente que se resuelvan ciertos problemas prácticos empleando proporciones. Para solucionarlos, se utiliza el procedimiento de cinco pasos que se ha estado empleando a lo largo del texto. A continuación se presenta el procedimiento con instrucciones más específicas para traducir problemas a proporciones.

Para resolver problemas utilizando proporciones

1. Entienda el problema.
2. Traduzca el problema a lenguaje matemático.
 - a) En primer lugar, represente la cantidad desconocida con una variable (una letra).
 - b) En segundo lugar, plantee la proporción escribiendo la razón dada del lado izquierdo del signo de igualdad, y la incógnita y la otra cantidad dada del lado derecho. Al plantear el lado derecho de la proporción, las cantidades respectivas deben ocupar las mismas posiciones en ambos lados; por ejemplo, una proporción aceptable es

$$\text{Razón dada} \left\{ \frac{\text{millas}}{\text{hora}} = \frac{\text{millas}}{\text{hora}} \right.$$

3. Efectuar los cálculos matemáticos necesarios para resolver el problema.
 - a) Una vez que ha escrito la proporción en forma correcta, elimine las unidades y multiplique en forma cruzada.
 - b) Resuelva la ecuación resultante.
4. Compruebe la respuesta que se obtuvo en el paso 3.
5. Asegurarse de responder la pregunta original.

Observe que las dos razones* deben tener las mismas unidades. Por ejemplo, si una razón se da en millas/hora, y la segunda en pies/hora, debemos cambiar una de las razones antes de plantear la proporción.

Ejemplo 7 **Aplicación de fertilizante** Un saco de fertilizante de 30 libras cubrirá un área de 2500 pies cuadrados.

- a) ¿Cuántas libras se requieren para cubrir una superficie de 16,000 pies cuadrados?
- b) ¿Cuántos sacos de fertilizante se necesitan?

Solución a) **Entender** La razón dada es 30 libras para 2500 pies cuadrados. La cantidad desconocida es el número de libras necesario para cubrir 16,000 pies cuadrados.

Traducir Sea x = número de libras.

$$\text{Razón dada} \left\{ \frac{30 \text{ libras}}{2500 \text{ pies cuadrados}} = \frac{x \text{ libras}}{16,000 \text{ pies cuadrados}} \right. \begin{array}{l} \leftarrow \text{Incógnita.} \\ \leftarrow \text{Cantidad dada.} \end{array}$$

Observe que el peso y el área están dados en las mismas posiciones relativas.



*Si se habla con propiedad, un cociente de dos cantidades con unidades diferentes, como $\frac{6 \text{ millas}}{1 \text{ hora}}$, se llama *tasa*. Sin embargo, en el estudio de las proporciones, pocos libros hacen la distinción entre razones y tasas.

Calcular

$$\begin{aligned}\frac{30}{2500} &= \frac{x}{16,000} \\ 30(16,000) &= 2500x && \text{Productos cruzados.} \\ 480,000 &= 2500x && \text{Resolver.} \\ \frac{480,000}{2500} &= x \\ 192 &= x\end{aligned}$$

Revisar Con una calculadora, se determina que ambas razones en la proporción, $30/2500$ y $192/16,000$, tienen un valor de 0.012. Así, la respuesta de 192 libras es correcta.

Respuesta La cantidad de fertilizante que se necesita para cubrir un área de 16,000 pies cuadrados es 192 libras.

b) Como cada saco pesa 30 libras, determinamos el número de sacos con una división.

$$192 \div 30 = 6.4 \text{ sacos}$$

Entonces, el número de sacos necesario es de 7, ya que sólo pueden comprarse sacos completos. 

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 65

Ejemplo 8

Almuerzo de caridad Cada año, en Tampa, Florida, el equipo de Los Yanquis de Nueva York ofrece un almuerzo de caridad cuyos ingresos están destinados para apoyar a los clubes de niños y niñas de Tampa. En la reunión, los participantes abordan a los miembros del equipo y obtienen sus autógrafos. Si un jugador en particular firma, en promedio, 33 autógrafos en 4 minutos, ¿cuánto tiempo tardará en firmar 350 autógrafos?

Solución



La cantidad desconocida es el tiempo que necesita un jugador para firmar 350 autógrafos. Se sabe que, en promedio, firma 33 autógrafos en 4 minutos. Se empleará esta razón para plantear la proporción.

Traducir Se representará con x el tiempo para firmar 350 autógrafos.

$$\text{Razón dada} \left\{ \frac{33 \text{ autógrafos}}{4 \text{ minutos}} = \frac{350 \text{ autógrafos}}{x \text{ minutos}} \right.$$

Calcular

$$\begin{aligned}\frac{33}{4} &= \frac{350}{x} \\ 33x &= 4(350) \\ 33x &= 1400 \\ x &= \frac{1400}{33} \approx 42.4\end{aligned}$$

Revisar y responder Con una calculadora, determine que ambas razones de la proporción, $\frac{33}{4}$ y $\frac{350}{42.4}$ tengan el mismo valor aproximado de 8.25. Por tanto, se necesita alrededor de 42.4 minutos para que el jugador firme 350 autógrafos. 

Ejemplo 9

Dosis de medicina Un doctor pide a una enfermera que administre a un paciente 250 miligramos de simeticona. El medicamento sólo está disponible en una solución cuya concentración es de 40 miligramos de sustancia por cada 0.6 mililitros de solución. ¿Cuántos mililitros de solución debe administrar la enfermera al paciente?

Solución **Entender y traducir** Establezcamos la proporción utilizando el medicamento disponible como la razón dada, y la cantidad de mililitros necesarios como la incógnita.

$$\text{Razón dada (prescripción)} \left\{ \frac{40 \text{ miligramos}}{0.6 \text{ mililitros}} = \frac{250 \text{ miligramos}}{x \text{ mililitros}} \right. \begin{array}{l} \text{Prescripción} \\ \text{que se desea.} \\ \text{Incógnita.} \end{array}$$

Calcular

$$\frac{40}{0.6} = \frac{250}{x}$$

$$40x = 0.6(250) \quad \text{Productos cruzados.}$$

$$40x = 150 \quad \text{Resolver.}$$

$$x = \frac{150}{40} = 3.75$$

Revisar y responder La enfermera debe administrar 3.75 mililitros de la solución de simeticona. 

SUGERENCIA

Al plantear una proporción, no importa cuál unidad de la razón dada esté en el numerador y cuál en el denominador, siempre que las unidades en el otro lado ocupen *la misma posición relativa*. Por ejemplo, los planteamientos

$$\frac{60 \text{ millas}}{1.5 \text{ horas}} = \frac{x \text{ millas}}{4.2 \text{ horas}} \quad \text{y} \quad \frac{1.5 \text{ horas}}{60 \text{ millas}} = \frac{4.2 \text{ horas}}{x \text{ millas}}$$

darán el mismo resultado de 168 (inténtelo y compruebe que así es). Al plantear la proporción, hágalo de modo que tenga el máximo sentido para usted. Observe que cuando se establece una proporción que contiene unidades diferentes, no debe multiplicarse éstas por sí mismas durante los productos cruzados.

Correcto

$$\frac{\text{millas}}{\text{horas}} = \frac{\text{millas}}{\text{horas}}$$

Incorrecto

$$\frac{\cancel{\text{millas}}}{\cancel{\text{horas}}} = \frac{\cancel{\text{horas}}}{\cancel{\text{millas}}}$$

4 Usar proporciones para convertir unidades

También podemos utilizar las proporciones para transformar una cantidad en otra; por ejemplo, para convertir una medida en pies a otra en metros, o de libras a kilogramos. Los siguientes ejemplos ilustran la conversión de unidades.

Ejemplo 10 Pies a millas En una milla hay 5280 pies. ¿A qué distancia equivalen, en millas, 18,362 pies?

Solución **Entender y traducir** Sabemos que 1 milla equivale a 5280 pies. Se usa este hecho en una de las razones de la proporción. En la segunda razón se plantea las cantidades con las mismas unidades en las posiciones respectivas. La cantidad desconocida es el número de millas, que se denotará con x .

$$\text{Razón conocida} \left\{ \frac{1 \text{ milla}}{5280 \text{ pies}} = \frac{x \text{ millas}}{18,362 \text{ pies}} \right.$$

Observe que ambos numeradores contienen las mismas unidades, así como los dos denominadores.

Calcular Ahora eliminemos las unidades y despejemos x mediante productos cruzados.

$$\begin{aligned}\frac{1}{5280} &= \frac{x}{18,362} \\ 1(18,362) &= 5280x && \text{Productos cruzados.} \\ 18,362 &= 5280x && \text{Resolver.} \\ \frac{18362}{5280} &= \frac{5280x}{5280} \\ 3.48 &\approx x\end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 75**

Revisar y responder Así, 18,362 pies son alrededor de 3.48 millas.



Ejemplo 11

Cambio de moneda Cuando la gente viaja a un país extranjero, con frecuencia necesita cambiar su dinero. Donna Boccio visitó Cancún, México. Entró en un banco local y le dijeron que 1 dólar equivalía a 9.696 pesos.

a) ¿Cuántos pesos obtendría si cambiara 150 dólares?

b) Más tarde, ese mismo día, Donna fue al mercado de la ciudad y compró una figura de cerámica. Negoció por ésta un precio de 245 pesos. Con el tipo de cambio que se dio, determine el costo en dólares que tuvo la figura.

Solución



a) Entender Dijimos que 1 dólar equivalía a 9.696 pesos mexicanos. Utilizamos esto para establecer una razón de la proporción. En la segunda razón, planteamos las cantidades con las mismas unidades en las mismas posiciones respectivas.

Traducir La cantidad desconocida es el número de pesos, que se denota con x .

$$\text{Razón dada} \left\{ \frac{1 \text{ dólar}}{9.696 \text{ pesos}} = \frac{150 \text{ dólares}}{x \text{ pesos}} \right.$$

Observe que ambos numeradores contienen dólares, y los dos denominadores pesos.

$$\begin{aligned}\text{Calcular} \quad \frac{1}{9.696} &= \frac{150}{x} \\ 1x &= 9.696(150) \\ x &= 1454.4\end{aligned}$$

Revisar y responder Así, 150 dólares podrían cambiarse por 1454.4 pesos mexicanos.

b) Entender y traducir Se emplea la misma razón dada que en el inciso **a)**. Ahora debe encontrarse el equivalente en dólares de 245 pesos mexicanos. Se denotará con x la cantidad equivalente en dólares.

$$\text{Razón dada} \left\{ \frac{1 \text{ dólar}}{9.696 \text{ pesos}} = \frac{x \text{ dólares}}{245 \text{ pesos}} \right.$$

$$\begin{aligned}\text{Calcular} \quad \frac{1}{9.696} &= \frac{x}{245} \\ 1(245) &= 9.696x \\ 245 &= 9.696x \\ 25.27 &\approx x\end{aligned}$$

Revisar y responder El costo en dólares de la figura es de 25.27.

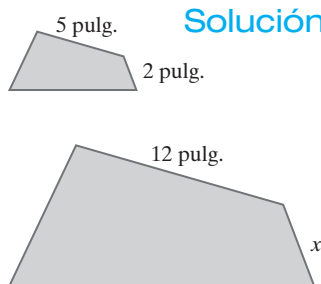


SUGERENCIA

Algunos de los problemas que hemos resuelto con proporciones, hubieran podido solucionarse sin éstas. Sin embargo, al trabajar con problemas de este tipo, es frecuente que los estudiantes tengan dificultad para decidir si multiplicar o dividir para obtener la respuesta correcta. Si plantea una proporción, entenderá mejor el problema y será más fácil obtener la respuesta correcta.

5 Emplear proporciones para solucionar problemas que involucran figuras semejantes

También es posible utilizar las proporciones para resolver problemas de geometría y trigonometría. Los siguientes ejemplos muestran la forma de emplear las proporciones para resolver problemas con **figuras semejantes**. Dos figuras son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales, y sus lados correspondientes son proporcionales. Dos figuras semejantes tienen la misma forma.

Ejemplo 12**Solución**

Las figuras que se muestran a la izquierda son semejantes. Encuentre la longitud del lado que se denota con x .

Se plantea una proporción de los lados correspondientes con el fin de hallar la longitud del lado x .

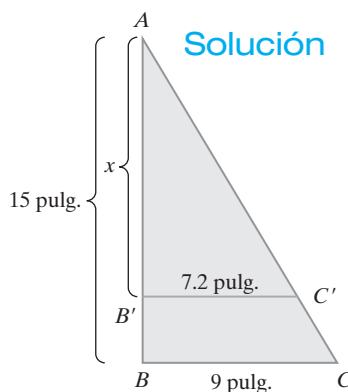
	Longitudes de la figura más chica	Longitudes de la figura más grande
5 pulgadas y 12 pulgadas son correspondientes.	↓	↓
2 pulgadas y x son lados correspondientes de figuras semejantes.	→	→
	$\frac{5}{2}$	$= \frac{12}{x}$
	$5x$	$= 24$
	x	$= \frac{24}{5} = 4.8$

Así, el lado que se denota con x mide 4.8 pulgadas de longitud. 

En el ejemplo 12, observe que la proporción también hubiera podido plantearse como

$$\frac{5}{12} = \frac{2}{x}$$

debido a que un par de lados correspondientes se encuentra en los numeradores y otro par en los denominadores.

Ejemplo 13**Solución**

Los triángulos ABC y $AB'C'$ son triángulos semejantes. Utilice una proporción para encontrar la longitud del lado AB' .

Se plantea una proporción de los lados correspondientes a fin de encontrar la longitud del lado AB' . Se hará que x denote la longitud del lado AB' . La proporción que se debe usar es

$$\frac{\text{longitud de } AB}{\text{longitud de } BC} = \frac{\text{longitud de } AB'}{\text{longitud de } B'C'}$$

Ahora, se insertan los valores apropiados y se resuelve para la variable x .

$$\begin{aligned}\frac{15}{9} &= \frac{x}{7.2} \\ (15)(7.2) &= 9x \\ 108 &= 9x \\ 12 &= x\end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 53**

Así, la longitud del lado AB' es de 12 pulgadas. 

Las matemáticas en acción

Razones calificadoras

Cuando solicite un préstamo hipotecario, tal vez perciba que se juzga si es rentable que reciba dinero para comprar una casa. Sin embargo, en cierto sentido, el juicio se establece en gran medida con el acomodo de números en un par de razones simples, que reciben el nombre de *razones calificadoras*. Una de éstas es la *razón de la vivienda* y la otra es la *razón de deuda*.



Por ejemplo, si la institución de crédito utiliza una razón de la vivienda de 27, significa que los gastos

mensuales por ella —pago mensual al capital por la hipoteca, pagos de interés, impuestos sobre la propiedad y seguro del propietario, entre otros pagos— no debe exceder el 27 por ciento del ingreso mensual bruto del cliente. Suponga que el ingreso bruto mensual en su hogar fuera de \$6500 y que los gastos mensuales por vivienda fueran de \$1700, entonces la razón de la vivienda sería de 26.2 (porque $\frac{1700}{6500} = 0.262 = 26.2\%$) y se aprobaría su crédito. Por cierto, observe que se utiliza en forma indistinta razones, decimales y porcentajes.

Si la razón de deuda de la institución de crédito es de 38, esto significa que los gastos mensuales por la vivienda más la deuda de largo plazo no deben exceder el 38 por ciento de su ingreso bruto mensual. Continuemos con el ejemplo anterior; si tuviera que hacer pagos mensuales de \$900 por un vehículo recreativo, la razón de deuda sería de 40 (porque $\frac{1700 + 900}{6500} = 0.40 = 40\%$) y sobre esa base la institución de crédito quizá rechazaría la solicitud de préstamo hipotecario.

Usted no debe descorazonarse. La razón de vivienda y la de deuda no son los únicos criterios que se aplican. Aun si éstas fueran algo elevadas, el prestamista podría juzgar favorablemente el préstamo con base en factores como la estabilidad de su empleo a largo plazo y la historia crediticia.

En Internet es posible encontrar cierto número de calculadoras en línea con el uso de un motor de búsqueda como www.google.com y las palabras clave **calculadora hipotecaria**. Encontrará calculadoras interactivas de todos los colores, tamaños y formas. Si las estudia cuidadosamente, descubrirá que los números por los que preguntan son los que se necesitan para calcular la razón de la vivienda y la razón de deuda, en forma casi invariable.

Conjunto de ejercicios 2.6

Ejercicios conceptuales

1. ¿Qué es una razón?
2. En la razón $a:b$, ¿cómo se denomina a a y a b ?
3. Mencione tres formas de escribir la razón de c a d .
4. ¿Qué es una proporción?
5. Como ya aprendió, las proporciones se emplean para resolver una variedad de problemas. ¿Qué información se necesita para plantear un problema como proporción y resolverlo?
6. ¿Qué son figuras semejantes?
7. ¿Las figuras semejantes deben ser del mismo tamaño? Explique.
8. ¿Las figuras semejantes deben tener la misma forma? Explique.

En los ejercicios 9 a 12, ¿la proporción está planteada en forma correcta? Explique.

9. $\frac{\text{gal}}{\text{min}} = \frac{\text{gal}}{\text{min}}$
10. $\frac{\text{pies}^2}{\text{lb}} = \frac{\text{pies}^2}{\text{lb}}$
11. $\frac{\text{pie}}{\text{seg}} = \frac{\text{seg}}{\text{pie}}$
12. $\frac{\text{imp.}}{\text{costo}} = \frac{\text{costo}}{\text{imp.}}$

Práctica de habilidades

Los resultados de un examen de matemáticas son 6 A, 4 B, 9 C, 3 D y 2 F. Escriba las siguientes razones en sus términos mínimos.

13. A a C
15. D a A.
17. Total de calificaciones a D
14. B al total de calificaciones
16. Calificaciones mejores que C al total de calificaciones
18. Calificaciones mejores que C a calificaciones menores que C

Determine las siguientes razones. Escriba cada razón en su mínima expresión.

19. 7 galones a 4 galones
21. 5 onzas a 15 onzas
23. 3 horas a 30 minutos
25. 26 onzas a 4 libras
20. 50 dólares a 60 dólares
22. 18 minutos a 24 minutos
24. 6 pies a 4 yardas
26. 7 monedas de 10 centavos a 12 monedas de 5 centavos.

Determine cada razón de los engranes en sus términos mínimos. (Consulte el ejemplo 4.)

27. Engrane impulsor, 40 dientes; engrane impulsado, 5 dientes.
28. Engrane impulsor 30 dientes; engrane impulsado, 8 dientes.

 En los ejercicios 29 a 32, **a)** Determine la razón indicada, y **b)** escriba la razón con alguna cantidad a 1.

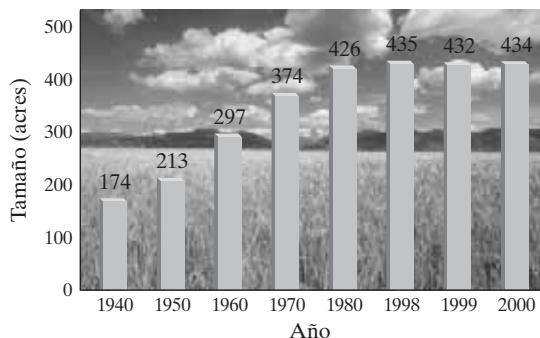
29. **Olimpiadas de verano** En los Juegos Olímpicos de verano de 2000, en Sydney, Australia, estuvieron representadas 199 naciones. En las Olimpiadas de verano de 1984, en Los Ángeles, California, hubo 140 naciones. ¿Cuál es la razón del número de naciones representadas en el año 2000 al de las que estuvieron en 1984?
30. **Correspondencia** En enero de 2002, el costo de enviar una onza de correspondencia era de 34 centavos, y el costo de enviar dos onzas, 57 centavos. ¿Cuál es la razón del costo de enviar una carta de una onza al costo de enviar otra de dos onzas?
31. **Fuerzas armadas** En enero de 2000, había en todo el mundo cerca de 1.13 millones de tropas de las fuerzas armadas de E.U., de los cuales alrededor de 0.38 millones pertenecían al ejército. ¿Cuál es la razón del total de fuerzas armadas a las del ejército?
32. **Población** La población de los Estados Unidos en 1990 era cerca de 249 millones, y en 2000 era alrededor de 281 millones. ¿Cuál es la razón de la población de E.U. en 2000 a la de 1990?

En los ejercicios 33 a 36 se presentan gráficas. Para cada uno, encuentre la razón que se indica.

33. Tamaño de una granja

- a) Determine la razón del tamaño promedio de una granja en 2000 al tamaño promedio en 1940.
- b) Calcule la razón del tamaño promedio de una granja en 1970 al de 2000.

Tamaño promedio de las granjas de E.U.

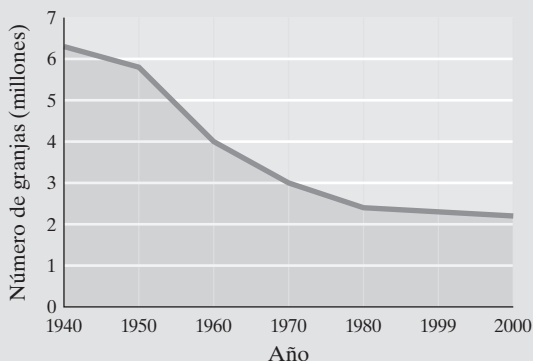


Fuente: Departamento de Agricultura de los E. U.

34. Número de granjas

- a) Estime la razón de las granjas en los E.U. en 1940 a las de 2000.
- b) Encuentre la razón de las granjas en los E.U. en 2000 a las de 1970.

Granjas en los E.U.

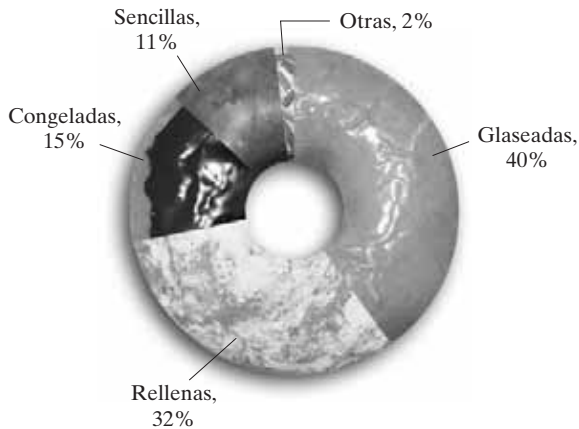


Fuente: Departamento de Agricultura

35. Dona favorita

- Determine la razón de personas cuyas donas favoritas son las glaseadas a las personas que prefieren las rellenas.
- Calcule la razón de personas cuyas donas favoritas son las congeladas a aquellas que las prefieren sencillas.

Sabores favoritos de donas

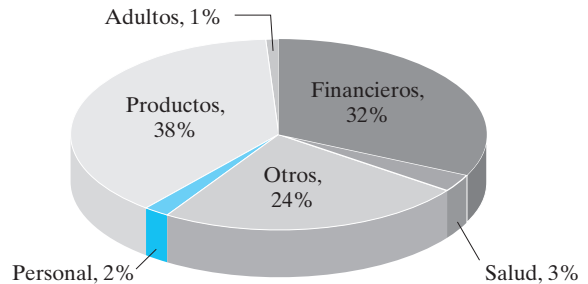


Fuente: The Heller Research Group

36. Correo basura

- Determine la razón de correo electrónico basura para Finanzas al correo basura para Salud.
- Calcule la razón de correo basura para Productos a todo el correo basura.

Correo basura (o spam), 12 a 18 de febrero de 2001



Fuente: Brightmail Inc.

Resuelva cada proporción para la variable por productos cruzados.

37. $\frac{3}{x} = \frac{5}{20}$

38. $\frac{x}{8} = \frac{24}{48}$

39. $\frac{5}{3} = \frac{75}{a}$

40. $\frac{x}{3} = \frac{90}{30}$

41. $\frac{90}{x} = \frac{-9}{10}$

42. $\frac{8}{12} = \frac{n}{6}$

43. $\frac{15}{45} = \frac{x}{-6}$

44. $\frac{y}{6} = \frac{7}{42}$

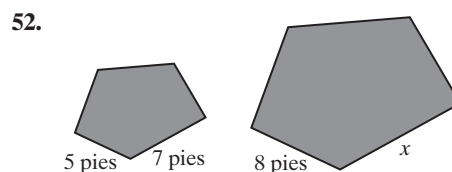
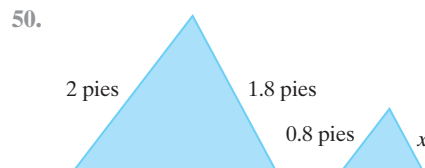
45. $\frac{3}{z} = \frac{-1.5}{27}$

46. $\frac{3}{12} = \frac{-1.4}{z}$

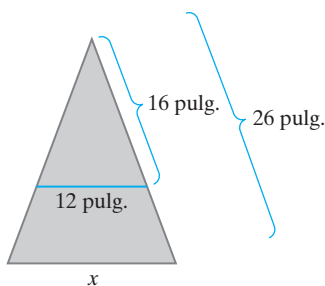
47. $\frac{9}{12} = \frac{x}{8}$

48. $\frac{2}{20} = \frac{x}{200}$

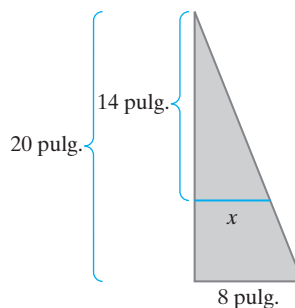
Las siguientes figuras son semejantes. Para cada pareja, encuentre la longitud del lado que se denota con x .



53.



54.



Solución de problemas

En los ejercicios 55 a 74, escriba una proporción que se utilice para resolver el problema. Después, resuelva la ecuación con objeto de obtener la respuesta..

55. **Lavado de ropa** Una botella de líquido Tide para lavar, contiene 100 onzas de fluido. Si una carga de ropa requiere 4 onzas del detergente, ¿cuántas cargas de ropa se pueden lavar con una botella?
56. **Tendido de cable** Una brigada de teléfonos tiende cable a razón de 42 pies por hora. ¿Cuánto tiempo les tomará tender 252 pies de cable?
57. **Distancia recorrida en auto** Un auto Ford Mustang 2002, con motor de 4.6 litros, está diseñado para rendir 23 millas por galón (manejo en autopista). ¿Qué tan lejos llegará con un tanque lleno con 15.7 galones de gasolina?
58. **Pintar la casa** Un galón de pintura cubre 825 pies cuadrados. ¿Cuánta pintura se necesita para cubrir una casa cuya superficie por pintar es de 5775 pies cuadrados?
59. **Modelo de tren** Un modelo de tren está a escala de 1:20. Es decir, un pie del modelo representa 20 pies del tren original. Si un cabús mide 30 pies de largo, ¿cuánto medirá su modelo?
60. **Distribuir fertilizante** Si un saco de 40 libras de fertilizante cubre 5000 pies cuadrados, ¿cuántas libras de fertilizante se necesitan para cubrir un área de 26,000 pies cuadrados?
61. **Aplicación de insecticida** Las instrucciones de una botella de insecticida líquido dicen “use 3 cucharaditas de insecticida por cada galón de agua”. Si el rociador tiene capacidad para 8 galones, ¿cuánto insecticida debe emplearse para llenar el rociador?
62. **Impuestos a la propiedad** El impuesto a la propiedad en la ciudad de Hendersonville, Carolina del Norte, es de \$9.475 por cada \$1000 de valor catastral. Si la casa de Estever está valuada en \$145,000, ¿cuál será el impuesto que debe pagarse por esa propiedad?
63. **Garza azul** En la fotografía se aprecia una garza azul. Si el ejemplar que en la foto mide 3.5 pulgadas en la realidad tiene 3.75 pies de altura, ¿cuánto mide aproximadamente su pico, que en la foto mide 0.4 pulgadas?



64. **Sopa de ajo** Una receta para preparar 6 porciones de sopa de ajo a la francesa requiere de $1\frac{1}{2}$ tazas de ajos rebanados finamente. Si la receta fuera para hacer 15 porciones, ¿cuántas tazas de ajos se necesitarían?
65. **Mapas** En un mapa, 0.5 pulgadas representan 22 millas, ¿cuál será la longitud de un mapa que corresponda a una distancia de 55 millas?
66. **Novela de Steven King** Karen Estes lee una novela de Steven King. Si lee 72 páginas en 1.3 horas, ¿cuánto tiempo le tomará leer todo el libro de 656 páginas?
67. **Toro de Wall Street** Suponga que la escultura del toro famoso que se encuentra en la bolsa de valores de Nueva York (observe la siguiente figura) es una réplica de un toro real a razón de 2.95 a 1. Es decir, el toro de metal es 2.95 veces más grande que el de verdad. Si la longitud del toro de Wall Street es de 28 pies, ¿cuánto medirá aproximadamente el toro que sirvió de modelo?



Vea el ejercicio 67.

- 68. Inundación.** Cuando los Duncan regresaron a su casa de vacaciones, el sótano estaba inundado (1 pie de agua). Se pusieron en contacto con el departamento de bomberos, que envió equipo para extraer el agua. Después de que la bomba había funcionado durante 30 minutos, se había retirado 3 pulgadas de agua, ¿cuánto tiempo, desde que comenzaron a bombear, se requeriría para retirar toda el agua del sótano?

En los ejercicios 75 a 86, utilice una proporción para hacer la conversión. Redondee las respuestas a dos cifras decimales.

- 75.** Convierta 78 pulgadas a pies.
76. Transforme 22,704 pies a millas (5280 pies = 1 milla).
77. Convierta 26.1 pies cuadrados a yardas cuadradas (9 pies cuadrados = 1 yarda cuadrada).
78. Transforme 146.4 onzas a libras.
79. Recién nacido Una pulgada es igual a 2.54 centímetros. Encuentre la estatura de un recién nacido, en pulgadas, si mide 50.8 centímetros.
80. Distancia Una milla es aproximadamente igual a 1.6 kilómetros. Calcule la distancia, en kilómetros, que hay de San Diego, California, a San Francisco, California, cuya distancia es de 520 millas.



- 69. Dosis de medicina** Una enfermera debe administrar 220 microgramos de sulfato de atropina. La medicina está disponible en forma de solución. La concentración de la solución de sulfato de atropina es de 400 microgramos por mililitro, ¿cuántos mililitros debe administrar?
- 70. Dosis por superficie corporal** Un doctor pide a una enfermera que administre 0.7 gramos de meprobamato por metro cuadrado de superficie corporal. La superficie corporal del paciente es de 0.6 metros cuadrados, ¿cuánto meprobamato debe administrar?
- 71. Tramos de natación** Jason Abbott nada 3 vueltas en 2.3 minutos, ¿cuánto tiempo aproximado le tomará nadar 30 vueltas si continúa nadando a la misma velocidad?
- 72. Lectura de una novela** Mary lee 40 páginas de una novela en 30 minutos. Si lee a la misma velocidad, ¿cuánto tiempo le tomará leer todo el libro de 760 páginas?
- 73. Síndrome de Prader-Willi** Se estima que cada año, en los Estados Unidos 1 de cada 12,000 (1:12,000) personas nace con una anomalía genética llamada síndrome de Prader-Willi. Si en el año 2000 en los Estados Unidos hubo casi 4,063,000 nacimientos, ¿aproximadamente cuántos niños nacieron con el síndrome de Prader-Willi?
- 74. Población de E.U.** En el año 2000, la tasa de natalidad en los Estados Unidos fue de 14.5 por cada mil personas. En 2000, en ese país hubo aproximadamente 4,063,000 nacimientos. ¿Cuál era la población de E.U. en el año mencionado?
- 81. Récord de jonrones** Barry Bonds, que juega para el equipo de béisbol de los Gigantes de San Francisco, tiene el récord de más jonrones, 73, en una temporada de 162 partidos. En los primeros 50 partidos de una temporada, ¿cuántos jonrones necesita anotar un jugador para estar en posibilidad de romper el récord de Bond?
- 82. Tierra** Un saco de 40 libras de tierra cubre 12 pies cuadrados (con una pulgada de profundidad), ¿cuántas libras de tierra se necesitan para cubrir 350 pies cuadrados (con profundidad de una pulgada)?
- 83. Oro** Si el oro se vende a \$408 por 480 pepitas (una onza troy), ¿cuál es el costo por pepita?
- 84. Interés por ahorro** Jim Chao invierte cierta cantidad de dinero en su cuenta de ahorros. Si ganó \$110.52 en 180 días, ¿cuánto interés ganará en 500 días si la tasa de interés no cambia?
- 85. Estadística** En un curso de estadística, se encuentra que para un conjunto de datos en particular, 15 puntos son igual a 3.75 de desviación estándar. ¿A cuántos puntos equivale una desviación estándar?
- 86. Tipo de cambio** Cuando Mike Weatherbee visitó los Estados Unidos desde Canadá, cambió 13.50 dólares canadienses por 10 dólares de E.U. Si cambia sus 600

dólares canadienses que le restan por dólares de E.U., ¿cuántos de éstos recibirá?



Puente de la Paz, que conecta Estados Unidos con Canadá

- 87. Colesterol** El nivel de colesterol de baja densidad de la señora Ruff es de 127 miligramos por decilitro (mg/dL). Su nivel de colesterol de alta densidad es de 60 mg/dL. ¿La razón del nivel de colesterol de baja densidad al de alta densidad de la Sra. Ruff es menor o igual que el recomendable de 4:1? (Consulte el ejemplo 2.)

88. Colesterol

- a) Otra razón que algunos doctores utilizan para medir el nivel de colesterol es la razón del colesterol total al de alta densidad.* ¿Esta razón aumenta o disminuye si el colesterol total permanece sin cambio pero el de alta densidad aumenta? Explique.
- b) Los doctores recomiendan que la razón de colesterol total al de alta densidad sea menor o igual que 4.5:1. Si el colesterol total de Mike es de 220 mg/dL, y el de alta densidad es de 50 mg/dL, ¿esta razón es menor o igual que 4.5:1? Explique.
89. Para la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si a se incrementa, en tanto que b y d permanecen sin cambio, ¿qué ocurre a c ? Explique.
90. Para la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si a y c no cambian, pero d disminuye, ¿qué pasa con b ? Explique.

Problemas de reto

- 91. Llantas usadas** Una llanta nueva de Goodyear tiene un dibujo de 0.34 pulgadas. Después de recorrer 5000 millas, el dibujo es de casi 0.31 pulgadas. Si la cantidad mínima legal de dibujo para una llanta es de 0.06 pulgadas, ¿cuántas millas más durarán las llantas? (Suponga que no hay problemas con el auto y que las llantas se gastan a un ritmo parejo.)

- 92. Pay de manzana** La receta para el relleno de un pay de manzana especifica lo siguiente:

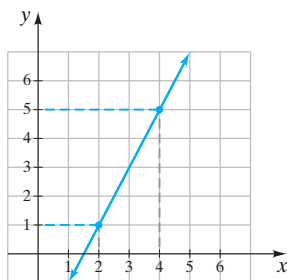
12 tazas de rebanadas de manzana
 $\frac{1}{2}$ taza de harina
 1 cucharadita de nuez molida
 1 taza de azúcar
 $\frac{1}{4}$ de taza de sal
 2 cucharadas soperas de mantequilla o margarina
 $1\frac{1}{2}$ cucharadita de jarabe

Determine la cantidad de cada uno de los demás ingredientes que debe emplearse si sólo se dispone de 8 tazas de rebanadas de manzanas.

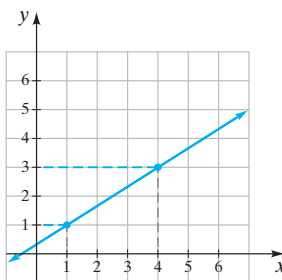
- 93. Insulina** La insulina viene en ampolletas de 10 centímetros cúbicos (cc), etiquetadas con el número de unidades de insulina por centímetro cúbico. Así que en una ampolleta diga U40 significa que hay 40 unidades de insulina por centímetro cúbico de fluido. Si un paciente requiere 25 unidades de insulina, ¿cuántos centímetros cúbicos de fluido debe incluirse en la jeringa para la ampolleta U40?

- 94. Pendiente** Un concepto importante, que se estudiará en el capítulo 4, es el de *pendiente*. La pendiente de una recta se define como la *razón* del cambio vertical al horizontal entre dos puntos cualesquiera de la recta. En las figuras siguientes, el cambio vertical se encuentra con las líneas rojas punteadas, y el horizontal con las líneas grises también punteadas.

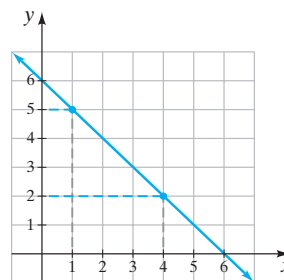
- a) Determine la pendiente de la recta de la figura 2.4a.
 b) Calcule la pendiente de la recta de la figura 2.4b.
 c) Calcule la pendiente de la recta de la figura 2.4c.



(a)



(b)



(c)

Figura 2.4

*El colesterol total incluye tanto el de alta densidad como el de baja, más el de otros tipos.



Actividad en grupo

Como grupo, estudien y respondan los ejercicios 95 y 96.

95. a) Cada miembro del grupo: encontrar la razón de su estatura a la longitud del brazo (de las puntas de los dedos de una mano, a las puntas de los dedos de la otra) cuando extiende sus brazos en forma horizontal y hacia fuera. Para obtener estas medidas se necesitará la ayuda del grupo.
- b) Si fuera a dibujarse una caja para su cuerpo con los brazos extendidos, ¿esta sería cuadrada o rectangular? Si fuera un rectángulo, la longitud de los brazos extendidos sería mayor que la estatura? Explique.
- c) Compare estos resultados con los del resto de integrantes de su grupo.
- d) ¿Qué razón se utilizaría para describir la estatura a la extensión de los brazos, para el grupo en conjunto? Explique.
96. Una razón especial en matemáticas se llama la *razón dorada*. Investigue la historia de ésta en un libro de matemáticas o en Internet, y escriban como grupo un reporte acerca de lo que es y por qué es importante.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.11] Mencione cada propiedad que se ilustra.

97. $x + 3 = 3 + x$

98. $3(xy) = (3x)y$

99. $2(x - 3) = 2x - 6$

[2.5] 100. Resuelva $-(2x + 6) = 2(3x - 6)$

101. Resuelva $3(4x - 3) = 6(2x + 1) - 15$

2.7 DESIGUALDADES EN UNA VARIABLE



- 1 Resolver desigualdades lineales.
- 2 Resolver desigualdades lineales cuya solución sea números reales, o no tengan solución.

1 Resolver desigualdades lineales

En la sección 1.5 se introdujeron los símbolos mayor que, $>$, y menor que, $<$. El símbolo $\geq$ significa *mayor o igual*, y $\leq$ quiere decir *menor o igual*. Una proposición de matemáticas que contenga uno o más de dichos símbolos, se denomina **desigualdad**. En ocasiones, la dirección del símbolo se denomina **sentido** o bien **orden de la desigualdad**.

Ejemplos de desigualdades con una variable

$$x + 3 < 5 \quad x + 4 \geq 2x - 6 \quad 4 > -x + 3$$

Para resolver una desigualdad, se debe dejar a la variable sola en un lado del símbolo de desigualdad. Para hacerlo, se utilizan propiedades muy parecidas a las que se emplearon para resolver ecuaciones. En este caso, hay cuatro propiedades que se emplean para solucionar desigualdades. Más adelante, en esta sección, se introducirán dos propiedades adicionales.

Propiedades que se emplean para resolver desigualdades

Para números reales a , b y c :

1. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.
2. Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.

(continúa en la página siguiente)

3. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.

4. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.

La propiedad 1 dice que es posible sumar el mismo número en ambos lados de una desigualdad. La propiedad 2 establece que se puede restar el mismo número en ambos lados de una desigualdad. La propiedad 3 afirma que es válido multiplicar por el mismo número *positivo* los dos lados de una desigualdad. La propiedad 4 enuncia que el mismo número *positivo* puede usarse para dividir ambos lados de una desigualdad. Cuando se emplea cualquiera de estas cuatro propiedades, *la dirección del símbolo de desigualdad no cambia*.

Ejemplo 1

Resuelva la desigualdad $x - 4 > 7$, y grafique la solución en la recta numérica.

Solución

Para resolver esta desigualdad, se necesita despejar la variable, x . Por tanto, debe eliminarse el -4 del lado izquierdo de la desigualdad. Para hacerlo, se suma 4 en ambos lados de ella.

$$\begin{aligned} x - 4 &> 7 \\ x - 4 + 4 &> 7 + 4 && \text{Sumar 4 en ambos lados.} \\ x &> 11 \end{aligned}$$

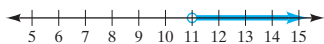


FIGURA 2.5

La solución es todos los números reales mayores que 11. En una recta numérica se ilustra lo anterior mediante un círculo claro en el número 11, y se dibuja una flecha hacia la derecha (figura 2.5).

El círculo abierto en el 11 indica que éste *no forma parte* de la solución. La flecha que va hacia la derecha indica que todos los valores mayores que 11 son soluciones de la desigualdad. 

Ejemplo 2

Resuelva la desigualdad $2x + 6 \leq -2$, y grafique la solución en una recta numérica.

Solución

Para despejar la variable se debe eliminar el $+6$ del lado izquierdo de la desigualdad. Esto se hace con la resta de 6 en ambos lados de ella.

$$\begin{aligned} 2x + 6 &\leq -2 \\ 2x + 6 - 6 &\leq -2 - 6 && \text{Restar 6 en ambos lados.} \\ 2x &\leq -8 \\ \frac{2x}{2} &\leq \frac{-8}{2} && \text{Dividir ambos lados entre 2.} \\ x &\leq -4 \end{aligned}$$

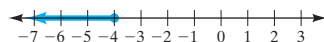


FIGURA 2.6

La solución es todos los números reales menores o iguales que -4 . La solución se ilustra en la recta numérica mediante un punto en el -4 , y se dibuja una flecha hacia la izquierda (figura 2.6).

El punto en el -4 indica que éste *sí forma parte* de la solución. La flecha hacia la izquierda indica que todos los valores menores o iguales que -4 también son soluciones de la desigualdad. 

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 21**

Observe que en las propiedades 3 y 4 se especificó que $c > 0$. ¿Qué sucede cuando una desigualdad se multiplica o divide por un número negativo? Los ejemplos 3 y 4 ilustran que **cuando se multiplica o divide una desigualdad por un número negativo, la dirección del símbolo de desigualdad cambia**.

Ejemplo 3 Multiplique ambos lados de la desigualdad $8 > -4$ entre -2 .

Solución

$$\begin{aligned} 8 &> -4 \\ -2(8) &\leq -2(-4) && \text{Cambia la dirección del símbolo de desigualdad.} \\ -16 &< 8 \end{aligned}$$



Ejemplo 4 Divida ambos lados de la desigualdad $8 > -4$ entre -2 .

Solución

$$\begin{aligned} 8 &> -4 \\ \frac{8}{-2} &\leq \frac{-4}{-2} && \text{La dirección del símbolo de desigualdad cambia.} \\ -4 &< 2 \end{aligned}$$



Ahora se establecerán dos propiedades adicionales que se utilizan cuando una desigualdad se multiplica o divide por un número negativo.

Propiedades adicionales que se utilizan para resolver desigualdades

5. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.

6. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Ejemplo 5 Resuelva la desigualdad $-2x > 6$, y grafique la solución en una recta numérica.

Solución

Para despejar la variable debe eliminarse el -2 del lado izquierdo de la desigualdad. Para hacer esto, se dividen ambos lados de la desigualdad entre -2 . Sin embargo, al hacer esto hay que recordar que se debe *cambiar la dirección* del signo de desigualdad.

$$\begin{aligned} -2x &> 6 \\ \frac{-2x}{-2} &\leq \frac{6}{-2} && \text{Dividir ambos lados entre } -2, \text{ y cambiar la} \\ &&& \text{dirección del símbolo de desigualdad.} \\ x &\leq -3 \end{aligned}$$

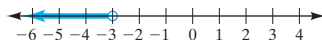


FIGURA 2.7

La solución es todos los números reales menores que -3 . La solución aparece graficada en la recta numérica de la figura 2.7.



Ejemplo 6 Resuelva la desigualdad $4 \geq -5 - x$, y grafique la solución en una recta numérica. Se ilustrarán dos métodos para solucionarla.

Solución

Método 1:

$$\begin{aligned} 4 &\geq -5 - x \\ 4 + 5 &\geq -5 + 5 - x && \text{Sumar 5 en ambos lados.} \\ 9 &\geq -x \\ -1(9) &\leq -1(-x) && \text{Multiplicar los dos lados por } -1 \text{ y cambiar} \\ &&& \text{la dirección del símbolo de desigualdad.} \\ -9 &\leq x \end{aligned}$$

La desigualdad $-9 \leq x$ también se escribe como $x \geq -9$.

Método 2:

$$\begin{aligned} 4 &\geq -5 - x \\ 4 + x &\geq -5 - x + x && \text{Sumar } x \text{ en ambos lados.} \\ 4 + x &\geq -5 \end{aligned}$$

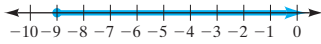


FIGURA 2.8

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 25**

$$4 - 4 + x \geq -5 - 4 \quad \text{Restar 4 en ambos lados.}$$

$$x \geq -9$$

La gráfica de la solución se aprecia en la recta numérica de la figura 2.8. También hubieran podido emplearse otros métodos para resolver este problema. 

En el ejemplo 6, método 1, observe que se escribió $-9 \leq x$ como $x \geq -9$. Aunque la solución $-9 \leq x$ es correcta, se acostumbra escribir la solución de una desigualdad con la variable en el lado izquierdo. Una razón para ello es que con frecuencia es más fácil graficar la solución en la recta numérica. ¿Cómo graficaría $-3 > x$? ¿Cómo se haría la gráfica de $-5 \leq x$? Si se rescriben estas desigualdades con la variable en el lado izquierdo, la respuesta es más clara.

$$-3 > x \quad \text{significa} \quad x < -3$$

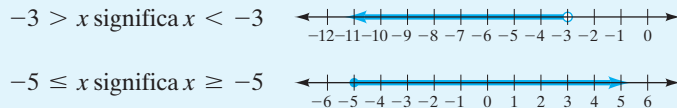
$$-5 \leq x \quad \text{significa} \quad x \geq -5$$

Observe que la respuesta cambia de una proposición mayor que a otra menor que, o de una menor que a otra mayor que. Cuando se cambie la respuesta de una forma a la otra, hay que recordar que el símbolo de desigualdad debe apuntar hacia la letra o número al que apuntaba originalmente.

SUGERENCIA

$a > x$ significa $x < a$ Observe que ambos símbolos de desigualdad apuntan hacia la x .
 $a < x$ significa $x > a$ Observe que los dos símbolos de desigualdad apuntan hacia la a .

Ejemplos



Ahora resolvamos desigualdades en las que la variable aparece en ambos lados del símbolo de desigualdad. Para resolver éstas, se utiliza el mismo procedimiento básico que se empleó para resolver ecuaciones. Sin embargo, debe recordarse que siempre que se multiplique o divida los dos lados de una desigualdad por un número negativo, debe cambiarse la dirección del símbolo de desigualdad.

Ejemplo 7

Resuelva la desigualdad $-5p + 9 < -2p + 6$, y grafique la solución en una recta numérica.

Solución

Esta desigualdad utiliza la variable p . La variable que se use no afecta el procedimiento para resolverla.

$$-5p + 9 < -2p + 6$$

$$-5p + 5p + 9 < -2p + 5p + 6 \quad \text{Sumar } 5p \text{ en ambos lados.}$$

$$9 < 3p + 6$$

$$9 - 6 < 3p + 6 - 6 \quad \text{Restar 6 en ambos lados.}$$

$$3 < 3p$$

$$\frac{3}{3} < \frac{3p}{3} \quad \text{Dividir ambos lados entre 3.}$$

$$1 < p$$

o bien, $p > 1$

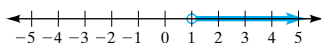


FIGURA 2.9

La solución aparece graficada en la figura 2.9. 

Ejemplo 8 Resuelva la desigualdad $\frac{1}{2}x + 3 \leq -\frac{1}{3}x + 7$, y grafique la solución en una recta numérica.

Solución Como la desigualdad contiene fracciones, se comienza por multiplicar ambos lados de ella por el mcd, 6, para eliminar las fracciones.

$$\frac{1}{2}x + 3 \leq -\frac{1}{3}x + 7$$

$$6\left(\frac{1}{2}x + 3\right) \leq 6\left(-\frac{1}{3}x + 7\right) \quad \text{Multiplicar los dos lados por el mcd, 6.}$$

$$3x + 18 \leq -2x + 42 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$5x + 18 \leq 42 \quad \text{Se sumó } 2x \text{ en ambos lados.}$$

$$5x \leq 24 \quad \text{Se restó 18 en ambos lados.}$$

$$x \leq \frac{24}{5} \quad \text{Se dividió ambos lados entre 5.}$$



FIGURA 2.10

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 53

La solución está graficada en la figura 2.10.



2 Resolver desigualdades lineales cuya solución sea números reales, o no tengan solución

En los ejemplos 9 y 10 se ilustran dos tipos especiales de desigualdad. El ejemplo 9 es una que se cumple para todos los números reales, y el ejemplo 10 es otra que nunca se cumple para los números reales.

Ejemplo 9 Resuelva la desigualdad $2(x + 3) \leq 5x - 3x + 8$, y grafique la solución en una recta numérica.

Solución

$$2(x + 3) \leq 5x - 3x + 8$$

$$2x + 6 \leq 5x - 3x + 8 \quad \text{Se usó la propiedad distributiva.}$$

$$2x + 6 \leq 2x + 8 \quad \text{Se redujeron los términos semejantes.}$$

$$2x - 2x + 6 \leq 2x - 2x + 8 \quad \text{Se restó } 2x \text{ en ambos lados.}$$

$$6 \leq 8$$



FIGURA 2.11

Como el 6 siempre es menor que 8, la solución es **todos los números reales** (figura 2.11).



Ejemplo 10 Resuelva la desigualdad $4(x + 1) > x + 5 + 3x$, y grafique la solución en una recta numérica.

Solución

$$4(x + 1) > x + 5 + 3x$$

$$4x + 4 > x + 5 + 3x \quad \text{Se utilizó la propiedad distributiva.}$$

$$4x + 4 > 4x + 5 \quad \text{Se redujeron los términos semejantes.}$$

$$4x - 4x + 4 > 4x - 4x + 5 \quad \text{Restar } 4x \text{ en ambos lados.}$$

$$4 > 5$$

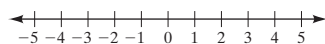


FIGURA 2.12

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 43

Como 4 nunca es mayor que 5, la respuesta es **no tiene solución** (figura 2.12). No existe ningún número real que haga que la proposición sea verdadera.



Conjunto de ejercicios 2.7

Ejercicios conceptuales

1. Mencione los cuatro símbolos de desigualdad que se dieron en esta sección y escriba la forma en que se lee cada uno.
2. Explique la diferencia entre $>$ y $\geq$.
3. Los enunciados siguientes, ¿son falsos o verdaderos? Explique.
 - a) $3 > 3$
 - b) $3 \geq 3$
4. Si $a < b$ es una proposición verdadera, ¿ $b > a$ también debe ser verdad? Explique.
5. Al resolver una desigualdad, ¿en qué condiciones será necesario cambiar la dirección del símbolo de desigualdad?
6. Mencione las seis reglas que se usan para resolver desigualdades.
7. Cuando se resuelve una desigualdad, si se obtiene el resultado $3 < 5$, ¿cuál sería la solución?
8. Al resolver una desigualdad, si se obtuviera el resultado $4 \geq 2$, ¿cuál sería la solución?
9. Al resolver una desigualdad, si se obtiene el resultado de que $5 < 2$, ¿cuál sería la solución?
10. Si se resuelve una desigualdad y se obtiene el resultado $-4 \geq -2$, ¿cuál es la solución?

Práctica de habilidades

Resuelva cada desigualdad, y haga la gráfica de la solución en una recta numérica.

11. $x + 2 > 6$
12. $x - 5 > -1$
13. $x + 9 \geq 6$
14. $4 - x \geq 3$
15. $-x + 3 < 8$
16. $7 < 3 + w$
17. $8 \leq 2 - r$
18. $2x < 4$
19. $-2x < 3$
20. $-12 \geq -3b$
21. $2x + 3 \leq 5$
22. $-4x - 3 > 5$
23. $6n - 12 < -12$
24. $7x - 4 \leq 9$
25. $4 - 6x > -5$
26. $8 < 4 - 2x$
27. $15 > -9x + 50$
28. $3x - 4 < 5$
29. $6 < 3x + 10$
30. $-3x > 2x + 10$
31. $6s + 2 \leq 6s - 9$
32. $-2x - 4 \leq -5x + 12$
33. $x - 4 \leq 3x + 8$
34. $-4n - 6 > 4n - 20$
35. $-x + 4 < -3x + 6$
36. $2(x - 3) < 4x + 10$
37. $6(2m - 4) \geq 2(6m - 12)$
38. $-2(w + 3) \leq 4w + 5$

39. $x + 3 < x + 4$

41. $6(3 - x) < 2x + 12$

43. $4x - 4 < 4(x - 5)$

45. $5(2x + 3) \geq 6 + (x + 2) - 2x$

47. $1.2x + 3.1 < 3.5x - 3.8$

49. $1.2(m - 3) \geq 4.6(2 - m) + 1.7$

51. $\frac{x}{3} \leq \frac{x}{4} + 4$

53. $t + \frac{1}{6} > \frac{2}{3}t$

55. $\frac{1}{8}(4 - r) \leq \frac{1}{4}$

57. $\frac{2}{3}(t + 2) \leq \frac{1}{4}(2t - 6)$

40. $x + 5 \geq x - 2$

42. $2(3 - x) + 4x < -6$

44. $-2(-5 - x) > 3(x + 2) + 4 - x$

46. $-3(-2x + 12) < -4(x + 2) - 6$

48. $-5.3r - 6.7 \geq 2.3 - 6.5r$

50. $-4.6(4 - x) < 2.4(x - 3) - 0.2$

52. $\frac{x}{5} - 2 \leq \frac{x}{6}$

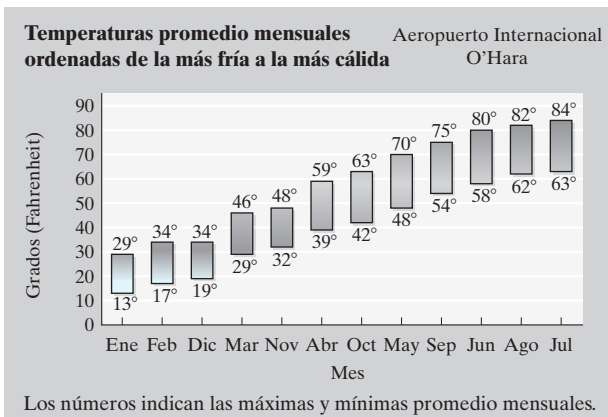
54. $\frac{3}{5}r - 9 < \frac{3}{8}r$

56. $5 - \frac{1}{6}x < \frac{2}{3}x$

58. $\frac{3}{4}(n - 4) \geq \frac{2}{3}(n - 4)$

Solución de problemas

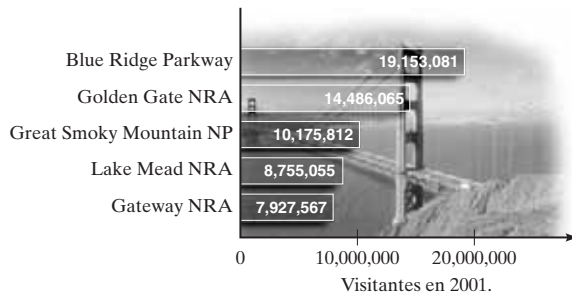
59. **Temperaturas de Chicago** La gráfica siguiente muestra las temperaturas promedio máxima y mínima mensuales en Chicago, durante un periodo de 126 años (*Fuente:* meteorólogo Richard Koeneman/WGN-TV). Observe que los meses no están en orden.



- ¿En cuáles meses la temperatura máxima promedio fue $> 65^{\circ}\text{F}$?
- ¿En cuáles meses la temperatura máxima promedio fue $\leq 65^{\circ}\text{F}$?
- ¿En cuáles meses la temperatura mínima promedio fue $< 29^{\circ}\text{F}$?
- ¿En cuáles meses la temperatura mínima promedio fue $\leq 58^{\circ}\text{F}$?

60. **Parques populares** La gráfica siguiente indica los 5 sitios más visitados del Sistema de Parques Nacionales de Estados Unidos, durante el año 2001.

Parques más visitados en los E.U.



Fuente: National Parks Service

- ¿En cuáles sitios el número de visitantes fue $\geq 12,000,000$?
 - ¿En cuáles sitios el número de visitantes fue $\geq 10,000,000$, pero $\leq 15,000,000$?
 - ¿En cuáles sitios el número de visitantes fue $> 8,000,000$ pero $\leq 10,175,812$?
 - ¿En cuáles sitios el número de visitantes fue $\geq 14,486,065$ y $\leq 19,153,081$?
61. Los símbolos de desigualdad que se han estudiado hasta este momento son $<$, $\leq$, $>$ y $\geq$. ¿Podría citar alguno que no se hubiera mencionado en esta sección?

62. A continuación se presenta una parte de la hoja de devolución de impuestos del Florida Individual and Joint Intangible Tax Return, para 2001.

HOJA PARA CALCULAR IMPUESTOS		
Instrucciones. Determine cuál columna se aplica con base en el estado de llenado. Ocupe sólo la columna aplicable.	(Ocupe sólo una columna de las de abajo)	
	Individual	Conjunto
6A. Introduzca los Activos Totales Intangibles del Programa A, Línea 5.	\$	\$
6B. Multiplique por la Tasa Impositiva	× 0.001	× 0.001
6C. Impuesto bruto	\$	\$
6D. Reste la exención personal	– \$20.00	– \$40.00
6E. Introduzca el impuesto total debido al paso de la cantidad al Programa A, Línea 6.	\$	\$

Utilice la Hoja para Calcular Impuestos a fin de determinar el impuesto total que se adeuda (Línea 6E), si los activos totales gravables del Programa A, línea 5, son los que siguen.

- a) 30,000 y el llenado es individual. b) \$175,000 y su llenado es individual.
c) \$200,000 y su llenado es conjunto. d) \$300,000 y su llenado es conjunto.

63. Considere la desigualdad $xy > 6$, donde x y y representan números reales. Explique por qué *no se puede* hacer el paso siguiente:

$$\frac{xy}{y} > \frac{6}{y} \quad \text{Dividir ambos lados entre } y.$$

Problemas de reto

64. Resuelva la desigualdad siguiente.

$$3(2 - x) - 4(2x - 3) \leq 6 + 2x - 4x$$

65. Solucione la siguiente desigualdad.

$$6x - 6 > -4(x + 3) + 5(x + 6) - x$$

Ejercicios de repaso acumulativo

- [1.9] 66. Evalúe $-x^2$ para $x = 3$.

67. Evalúe $-x^2$ para $x = -5$.

- [2.5] 68. Resuelva $4 - 3(2x - 4) = 5 - (x + 3)$.

- [2.6] 69. **Cuenta de la electricidad.** La Milford Electric Company cobra \$0.174 por kilowatt-hora de electricidad. La factura mensual de los Vega por consumo fue de \$87 durante julio, ¿cuántos kilowatts-hora de electricidad usaron los Vega en el mes de julio?

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Términos y frases importantes

2.1

Coefficiente numérico
Constante
Expresión
Factor
Reducir términos semejantes
Simplificar una expresión
Término
Términos semejantes
Variable

2.2

Comprobar una ecuación
Despejar la variable
Ecuaciones equivalentes
Ecuación lineal
Propiedad de igualdad de la suma
Resolver una ecuación
Solución de una ecuación

2.3

Propiedad de la multiplicación de igualdad
Recíproco

2.5

Contradicción
Ecuaciones condicionales
Identidad

2.6

Extremos

Figuras semejantes
Medios
Pendiente
Productos cruzados
Proporción
Razón
Términos de una razón

2.7

Desigualdad
Sentido (u orden) de la desigualdad

(continúa en la página siguiente)

HECHOS IMPORTANTES	
Propiedad distributiva	$a(b + c) = ab + ac$
Propiedad de la suma	Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.
Propiedad de la multiplicación	Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c, c \neq 0$.
Productos cruzados	Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$.
Propiedades que se usan para resolver desigualdades	
1. Si $a > b$, entonces $a + c > b + c$.	2. Si $a > b$, entonces $a - c > b - c$.
3. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$.	4. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$.
5. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $ac < bc$.	6. Si $a > b$ y $c < 0$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$.

Ejercicios de repaso del capítulo

[2.1] Utilice la propiedad distributiva para simplificar.

1. $3(x + 4)$
4. $-(x + 2)$
7. $5(5 - p)$
10. $4(-x + 3)$
13. $-(x + 2y - z)$
2. $3(x - 2)$
5. $-(m + 3)$
8. $6(4x - 5)$
11. $\frac{1}{2}(2x + 4)$
14. $-3(2a - 5b + 7)$
3. $-2(x + 4)$
6. $-4(4 - x)$
9. $-5(5x - 5)$
12. $-(3 + 2y)$

Simplifique.

15. $7x - 3x$
18. $-2x - x + 3y$
21. $6x - 2x + 3y + 6$
24. $-2(3a^2 - 4) + 6a^2 - 8$
27. $6 - (-x + 6) - x$
30. $4y - 3(x + y) + 6x^2$
33. $\frac{5}{6}x - \frac{1}{3}(2x - 6)$
16. $5 - 3y + 3$
19. $4m + 2n + 4m + 6n$
22. $x + 8x - 9x + 3$
25. $2x + 3(x + 4) - 5$
28. $2(2x + 5) - 10 - 4$
31. $\frac{1}{4}d + 2 - \frac{3}{5}d + 5$
34. $\frac{2}{3} - \frac{1}{4}n - \frac{1}{3}(n + 2)$
17. $1 + 3x + 2x$
20. $9x + 3y + 2$
23. $-4x^2 - 8x^2 + 3$
26. $4(3 - 2b) - 2b$
29. $-6(4 - 3x) - 18 + 4x$
32. $3 - (x - y) + (x - y)$

[2.2–2.5] Resuelva.

35. $6x = 6$
38. $\frac{x}{3} = -9$
41. $4c + 3 = -21$
44. $3(x - 2) = 6$
36. $x + 6 = -7$
39. $2x + 4 = 8$
42. $4 - 2a = 10$
45. $-12 = 3(2x - 8)$
37. $x - 4 = 7$
40. $14 = 3 + 2x$
43. $-x = -12$
46. $4(6 + 2x) = 0$

47. $-6n + 2n + 6 = 0$

50. $4x + 6 - 7x + 9 = 18$

53. $8.4r - 6.3 = 6.3 + 2.1r$

56. $-2.3(x - 8) = 3.7(x + 4)$

59. $\frac{3}{5}(r - 6) = 3r$

62. $-(w + 2) = 2(3w - 6)$

65. $3x - 12x = 24 - 9x$

68. $4 - c - 2(4 - 3c) = 3(c - 4)$

71. $4(x - 3) - (x + 5) = 0$

74. $\frac{x}{6} = \frac{x - 4}{2}$

77. $\frac{2}{5}(2 - x) = \frac{1}{6}(-2x + 2)$

48. $-3 = 3w - (4w + 6)$

51. $4 + 3(x + 2) = 10$

54. $19.6 - 21.3t = 80.1 - 9.2t$

57. $\frac{p}{3} + 2 = \frac{1}{4}$

60. $\frac{2}{3}w = \frac{1}{7}(w - 2)$

63. $2x + 6 = 3x + 9 - 3$

66. $5p - 2 = -2(-3p + 6)$

69. $2(x + 7) = 6x + 9 - 4x$

72. $-2(4 - x) = 6(x + 2) + 3x$

75. $\frac{1}{5}(3s + 4) = \frac{1}{3}(2s - 8)$

78. $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{1}{2}(x + 3)$

49. $6 - (2n + 3) - 4n = 6$

52. $-3 + 3x = -2(x + 1)$

55. $0.35(c - 5) = 0.45(c + 4)$

58. $\frac{d}{6} + \frac{1}{7} = 2$

61. $9x - 6 = -3x + 30$

64. $-5a + 3 = 2a + 10$

67. $4(2x - 3) + 4 = 8x - 8$

70. $-5(3 - 4x) = -6 + 20x - 9$

73. $\frac{x + 3}{2} = \frac{x}{2}$

76. $\frac{2(2t - 4)}{5} = \frac{3t + 6}{4} - \frac{3}{2}$

[2.6] Determine las razones siguientes. Escriba cada razón en sus términos mínimos.

79. 12 pies a 20 pies

80. 80 onzas a 12 libras

81. 32 onzas a 2 libras

Resuelva cada proporción.

82. $\frac{x}{4} = \frac{8}{16}$

83. $\frac{5}{20} = \frac{x}{80}$

84. $\frac{3}{x} = \frac{15}{45}$

85. $\frac{20}{45} = \frac{15}{x}$

86. $\frac{6}{5} = \frac{-12}{x}$

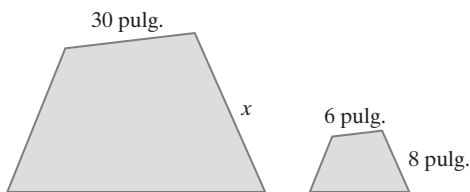
87. $\frac{b}{6} = \frac{8}{-3}$

88. $\frac{-4}{9} = \frac{-16}{x}$

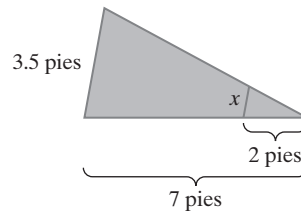
89. $\frac{x}{-15} = \frac{30}{-5}$

Los pares de figuras siguientes son semejantes. Para cada par encuentre la longitud del lado que se denota como x .

90.



91.



[2.7] Resuelva cada desigualdad y grafique la solución en una recta numérica.

92. $3x + 4 \geq 10$

93. $-4a - 6 > 4a - 14$

94. $5 - 3r \leq 2r + 15$

95. $2(x + 4) \leq 2x - 5$

96. $2(x + 3) > 6x - 4x + 4$

97. $x + 6 > 9x + 30$

98. $x - 2 \leq -4x + 7$

99. $-(x + 2) < -2(-2x + 5)$

100. $\frac{x}{2} < \frac{2}{3}(x + 3)$

101. $\frac{3}{10}(t - 2) \leq \frac{3}{4}(4 + 2t)$

[2.6] Plantee una proporción y resuelva cada problema.

- 102. Viaje en lancha** Una embarcación navega 40 millas en 1.8 horas. Si viaja a la misma velocidad, ¿cuánto tiempo le tomará recorrer 140 millas?



- 103. Pastel** Si una rebanada de 4 onzas de pastel tiene 160 calorías, ¿cuántas tendrá una rebanada de 6 onzas?
- 104. Máquina copiadora** Si una máquina puede copiar 20 páginas por minuto, ¿cuántas páginas copiará en 22 minutos?
- 105. Escala de un mapa** Si la escala de un mapa es de 1 pulgada a 60 millas, ¿qué distancia en el mapa representará a 380 millas?
- 106. Modelo de carro** Bryce Winston construye un modelo de carro a escala de 1 pulgada a 1.5 pies. Si el modelo terminado mide 10.5 pulgadas, ¿cuál es el tamaño real del auto?
- 107. Tipo de cambio** Si 1 dólar estadounidense se cambia por 9.165 pesos mexicanos, encuentre el valor de 1 peso en términos de dólares estadounidenses.
- 108. Catsup** Si una máquina puede llenar y sellar 80 botellas de catsup en 50 segundos, ¿cuántas botellas llenará y sellará en 2 minutos?

Examen de práctica del capítulo

Utilice la propiedad distributiva para simplificar.

1. $-3(4 - 2x)$
2. $-(x + 3y - 4)$

Simplifique

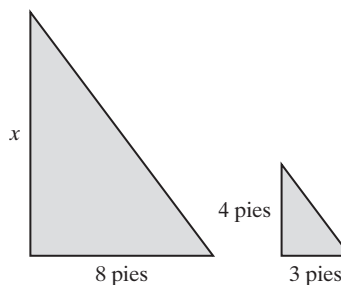
3. $5x - 8x + 4$
4. $4 + 2x - 3x + 6$
5. $-y - x - 4x - 6$
6. $a - 2b + 6a - 6b - 3$
7. $2x^2 + 3 + 2(3x - 2)$

Resuelva los ejercicios 8 a 16.

8. $2.4x - 3.9 = 3.3$
9. $\frac{5}{6}(x - 2) = x - 3$
10. $6m - (4 - 2m) = 0$
11. $3w + 2(2w - 6) = 4(3w - 3)$
12. $2x - 3(-2x + 4) = -13 + x$
13. $3x - 4 - x = 2(x + 5)$
14. $-3(2x + 3) = -2(3x + 1) - 7$
15. $\frac{9}{x} = \frac{3}{-15}$
16. $\frac{1}{7}(2x - 5) = \frac{3}{8}x - \frac{5}{7}$
17. ¿Cómo se llama una ecuación que tiene
 - a) exactamente una solución,
 - b) ninguna solución,
 - c) todos los números reales como solución?

Resuelva los ejercicios 18 a 21 y grafique la solución en una recta numérica.

18. $2x - 4 < 4x + 10$
19. $3(x + 4) \geq 5x - 12$
20. $4(x + 3) + 2x < 6x - 3$
21. $-(x - 2) - 3x = 4(1 - x) - 2$
22. Las siguientes figuras son semejantes. Encuentre la longitud del lado x .



23. **Insecticida** Si 6 galones de insecticida alcanzan para dar tratamiento a 3 acres de terreno, ¿cuántos galones se necesitarán para tratar 75 acres?
24. **Utilidad de una gasolinera** Suponga que el propietario de una gasolinera logra una utilidad de 40 centavos por galón de gasolina que vende. ¿Cuántos galones tendría que vender en un año a fin de obtener una utilidad de \$20,000 por las ventas de gasolina?
25. **Tiempo de viaje** Mientras viaja, el lector observa que recorre 25 millas en 35 minutos. Si su velocidad no cambia, ¿cuánto tiempo le tomará recorrer 125 millas?

Examen de repaso acumulativo

Haga el siguiente examen y revise sus respuestas con que aparecen al final. Repase cualquier pregunta que haya respondido en forma incorrecta. La sección y objetivo en que se cubrió el material se indica después de cada respuesta.

- Multiplique $\frac{52}{15} \cdot \frac{10}{13}$
- Divida $\frac{5}{24} \div \frac{2}{9}$
- Inserte cualquiera de los símbolos $<$, $>$, $=$, en el área sombreada a fin de que la proposición sea verdadera: $|-2|$  1.
- Evalúe $-5 - (-4) + 12 - 8$.
- Reste -6 de -7 .
- Evalúe $20 - 6 \div 3 \cdot 2$.
- Evalúe $3[6 - (4 - 3^2)] - 30$.
- Evalúe $-2x^2 - 6x + 8$ cuando $x = 2$.
- Diga el nombre de la propiedad que se ilustra.
 $(x + 4) + 6 = x + (4 + 6)$

Simplifique

- $8x + 2y + 4x - y$
- $9 - \frac{2}{3}x + 16 + \frac{3}{4}x$

Resuelva.

- $6x + 2 = 10$
- $-6x - 5x + 6 = 28$
- $4(x - 2) = 5(x - 1) + 3x + 2$
- $\frac{40}{30} = \frac{3}{x}$
- $\frac{3}{4}n - \frac{1}{5} = \frac{2}{3}n$

Resuelva y grafique la solución en una recta numérica.

- $x - 3 > 7$
- $2x - 7 \leq 3x + 5$
- Fertilizante** Una bolsa de 36 libras de fertilizante sirve para mejorar un área de 5000 pies cuadrados. ¿Cuántas libras de fertilizante necesitará Marisa Neilson para fertilizar sus 22,000 pies cuadrados de césped?
- Ingresos** Si Samuel tiene ingresos de \$10.50 por trabajar 2 horas atendiendo embarcaciones en un muelle, ¿cuánto gana por 8 horas?

Respuestas al examen de repaso acumulativo

- $\frac{8}{3}$; [Sec. 1.3, Obj. 3]
- $\frac{15}{16}$; [Sec. 1.3, Obj. 4]
- $>$; [Sec. 1.5, Obj. 2]
- 3; [Sec. 1.7, Obj. 3]
- -1 ; [Sec. 1.7, Obj. 1]
- 16; [Sec. 1.9, Obj. 4]
- 3; [Sec. 1.9, Obj. 5]
- 12; [Sec. 1.9, Obj. 6]
- Propiedad asociativa de la suma; [Sec. 1.10, Obj. 2]
- $12x + y$; [Sec. 2.1, Obj. 3]
- $\frac{1}{12}x + 25$; [Sec. 2.1, Obj. 3]
- $\frac{4}{3}$; [Sec. 2.4, Obj. 1]
- -2 ; [Sec. 2.4, Obj. 1]
- $-\frac{5}{4}$; [Sec. 2.5, Obj. 1]
- 2.25; [Sec. 2.6, Obj. 2]
- $\frac{12}{5}$; [Sec. 2.5, Obj. 2]
- $x > 10$, ; [Sec. 2.7, Obj. 1]
- $x \geq -12$, ; [Sec. 2.7, Obj. 1]
- 158.4 libras; [Sec. 2.6, Obj. 3]
- \$42; [Sec. 2.6, Obj. 3]

Capítulo 4

Exponentes y polinomios



4.1 Exponentes

4.2 Exponentes negativos

4.3 Notación científica

4.4 Suma y resta de polinomios

4.5 Multiplicación de polinomios

4.6 División de polinomios

Resumen del capítulo

Ejercicios de repaso del capítulo

Examen de práctica del capítulo

Examen de repaso acumulativo

En la mayoría de las áreas de la ciencia y tecnología trabajamos con números muy pequeños o muy grandes. Cotidianamente escuchamos más y más terminología mencionando cantidades pequeñas y grandes. Por ejemplo, nuestra computadora tiene un disco duro de 40 gigabytes, y expresamos el tiempo que tarda en realizar los cálculos en microsegundos. La notación científica es una forma práctica de trabajar con cantidades pequeñas o grandes. En el ejercicio 85 de la página 270 le pedimos que utilice notación científica para determinar cuánto tiempo tardará la luz del sol en llegar a la tierra, dada la distancia entre los dos y la velocidad a que viaja la luz.



Avance de la lección

En este capítulo estudiaremos los exponentes y polinomios. En las secciones 4.1 y 4.2 analizaremos las reglas de los exponentes. En la sección 4.3, al estudiar la notación científica, emplearemos dichas reglas para resolver problemas de la vida real que involucren números muy grandes o muy pequeños. El conocimiento de la notación científica también le ayudará en sus cursos de ciencias y otros.

En las secciones 4.4 a 4.6, explicamos cómo sumar, restar, multiplicar y dividir polinomios. Para tener éxito con ese material, debe entender las reglas de los exponentes que presentamos en las primeras dos secciones del capítulo. *Para comprender la factorización, que se expone en el capítulo 5, necesitamos entender los polinomios, en especial su multiplicación.* Como veremos, factorizar polinomios es lo inverso de multiplicarlos. En todo el libro trabajamos con polinomios.

4.1 EXPONENTES



- 1 Repasar los conceptos básicos de los exponentes.
- 2 Aprender las reglas de los exponentes.
- 3 Simplificar una expresión antes de utilizar la regla de la potencia expandida.

1 Repasar los conceptos básicos de los exponentes

Para utilizar los polinomios necesitamos ampliar nuestro conocimiento de los exponentes que presentamos en la sección 1.9. Revisemos los conceptos fundamentales en la expresión x^n , denominamos **base** a la x , y a la n , **exponente**. x^n se lee “ x elevada a la n -ésima potencia”.

$$x^2 = \underbrace{x \cdot x}_{\text{2 factores de } x}$$

2 factores de x

$$x^4 = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdot x}_{\text{4 factores de } x}$$

4 factores de x

$$x^m = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{\text{m factores de } x}$$

m factores de x

EJEMPLO 1 Escribir $xxxxxyyy$ utilizando exponentes.

Solución

$$\underbrace{x x x x}_{\text{4 factores de } x} \underbrace{y y y}_{\text{3 factores de } y} = x^4 y^3$$



Recuerde que cuando un término contiene una variable sin coeficiente numérico, suponemos que éste es igual a 1. Por ejemplo $x = 1x$ y $x^2y = 1x^2y$.

También recuerde que cuando una variable o un valor numérico no tienen exponente, suponemos que dicho exponente es 1. Por ejemplo, $x = x^1$, $xy = x^1y^1$, $x^2y = x^2y^1$ y $2xy^2 = 2^1x^1y^2$.

2 Aprender las reglas de los exponentes

Ahora aprenderemos las reglas de los exponentes.

EJEMPLO 2 Multiplicar $x^4 \cdot x^3$.

Solución

$$\underbrace{x^4}_{x \cdot x \cdot x \cdot x} \cdot \underbrace{x^3}_{x \cdot x \cdot x} = x^7$$



En el ejemplo 2 mostramos que al multiplicar expresiones que tienen la misma base, ésta se conserva y *sumamos* los exponentes. Veamos la **regla del producto para los exponentes**.

Regla del producto para los exponentes

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

En el ejemplo 2, demostramos que $x^4 \cdot x^3 = x^7$. Este problema también hubiera podido resolverse mediante la regla del producto: $x^4 \cdot x^3 = x^{4+3} = x^7$.

EJEMPLO 3 Multiplique cada expresión usando la regla del producto.

- a) $3^2 \cdot 3$ b) $2^4 \cdot 2^2$ c) $x \cdot x^4$ d) $x^3 \cdot x^6$ e) $y^4 \cdot y^7$

Solución

a) $3^2 \cdot 3 = 3^2 \cdot 3^1 = 3^{2+1} = 3^3$ o 27 b) $2^4 \cdot 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$ o 64

c) $x \cdot x^4 = x^1 \cdot x^4 = x^{1+4} = x^5$ d) $x^3 \cdot x^6 = x^{3+6} = x^9$

e) $y^4 \cdot y^7 = y^{4+7} = y^{11}$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 17



CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Observe que en el ejemplo 3a) tenemos que $3^2 \cdot 3^1$ es igual a 3^3 y no 9^3 . Al multiplicar potencias de la misma base, *no multiplicamos las bases*.

CORRECTO

$$3^2 \cdot 3^1 = 3^3$$

INCORRECTO

$$\cancel{3^2} \cdot \cancel{3^1} = \cancel{9^3}$$

El ejemplo 4 le ayudará a comprender la **regla del cociente para exponentes**.

EJEMPLO 4 Dividir $x^5 \div x^3$.

Solución

$$\frac{x^5}{x^3} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \frac{1x^2}{1} = x^2$$



Al dividir expresiones con la misma base, conservamos ésta y restamos el exponente del denominador del exponente del numerador.

Regla del cociente para exponentes

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$$

En el ejemplo 4 demostramos que $x^5/x^3 = x^2$. Este problema también hubiera podido resolverse mediante la regla del cociente: $x^5/x^3 = x^{5-3} = x^2$.

EJEMPLO 5 Dividir cada expresión de acuerdo con la regla del cociente.

$$\text{a) } \frac{3^5}{3^2} \quad \text{b) } \frac{6^4}{6} \quad \text{c) } \frac{x^{12}}{x^5} \quad \text{d) } \frac{y^{10}}{y^8} \quad \text{e) } \frac{z^8}{z}$$

Solución

$$\text{a) } \frac{3^5}{3^2} = 3^{5-2} = 3^3 \text{ o } 27$$

$$\text{b) } \frac{6^4}{6} = \frac{6^4}{6^1} = 6^{4-1} = 6^3 \text{ o } 216$$

$$\text{c) } \frac{x^{12}}{x^5} = x^{12-5} = x^7$$

$$\text{d) } \frac{y^{10}}{y^8} = y^{10-8} = y^2$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 23**

$$\text{e) } \frac{z^8}{z} = \frac{z^8}{z^1} = z^{8-1} = z^7$$

**CÓMO EVITAR
ERRORES COMUNES**

Observe que en el ejemplo 5a) tenemos que $3^5/3^2$ es 3^3 y no 1^3 . Al dividir potencias con la misma base, *no se dividen las bases*.

CORRECTO

$$\frac{3^3}{3^1} = 3^2 \text{ o } 9$$

INCORRECTO

$$\frac{3^3}{3^1} \neq 1^2$$

La respuesta al ejemplo 5c), x^{12}/x^5 es x^7 . Obtuvimos esta respuesta mediante la regla del cociente. También puede resolverse dividiendo los factores comunes del numerador entre los del denominador, así:

$$\frac{x^{12}}{x^5} = \frac{(\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}) \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{(\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x})} = x^7$$

Dividimos entre el producto de las cinco x , que es x^5 . Indicamos este proceso en forma abreviada del siguiente modo.

$$\frac{x^{12}}{x^5} = \frac{\cancel{x^5} \cdot x^7}{\cancel{x^5}} = x^7$$

En esta sección, para simplificar una expresión cuando el numerador y el denominador tienen la misma base y el exponente del denominador es mayor que el del numerador, dividimos los factores comunes. Por ejemplo, simplificamos x^5/x^{12} con la división del factor común, x^5 , como sigue.

$$\frac{x^5}{x^{12}} = \frac{\cancel{x^5} \cdot x^7}{\cancel{x^5} \cdot x^7} = \frac{1}{x^7}$$

Ahora simplificaremos algunas expresiones dividiendo los factores comunes.

EJEMPLO 6 Simplificar dividiendo un factor común tanto del numerador como del denominador.

$$\text{a) } \frac{x^9}{x^{12}} \quad \text{b) } \frac{y^4}{y^9}$$

Solución a) Como el numerador es x^9 , el denominador se escribe como factor de x^9 . Como $x^9 \cdot x^3 = x^{12}$, se rescribe x^{12} como $x^9 \cdot x^3$.

$$\frac{x^9}{x^{12}} = \frac{\cancel{x^9} \cdot x^7}{\cancel{x^9} \cdot x^3} = \frac{1}{x^3}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 27**

$$\text{b) } \frac{y^4}{y^9} = \frac{\cancel{y^4} \cdot y^5}{\cancel{y^4} \cdot y^5} = \frac{1}{y^5}$$



En la siguiente sección mostraremos otra forma de evaluar expresiones como $\frac{x^9}{x^{12}}$ mediante la regla del exponente negativo.

El ejemplo 7 nos conduce a otra regla, la **regla del exponente cero**.

EJEMPLO 7 Dividir $\frac{x^3}{x^3}$.

Solución Según la regla del cociente,

$$\frac{x^3}{x^3} = x^{3-3} = x^0$$

Sin embargo,

$$\frac{x^3}{x^3} = \frac{1x^3}{1x^3} = \frac{1 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{1 \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

Como $x^3/x^3 = x^0$ y $x^3/x^3 = 1$, entonces x^0 debe ser igual a 1. 

Regla del exponente cero

$$x^0 = 1, \quad x \neq 0$$

Según la regla del exponente cero, cualquier número real, excepto 0, elevado a la potencia cero es igual a 1. Obsérvese que 0^0 no está definida.

EJEMPLO 8 Simplifique cada expresión. Suponga que $x \neq 0$.

a) 3^0 b) x^0 c) $3x^0$ d) $(3x)^0$ e) $4x^2y^3z^0$

Solución a) $3^0 = 1$

b) $x^0 = 1$

c) $3x^0 = 3(x^0)$
 $= 3 \cdot 1 = 3$ *Recuerde que el exponente afecta sólo al símbolo que lo precede inmediatamente, a menos que emplee paréntesis.*

d) $(3x)^0 = 1$

e) $4x^2y^3z^0 = 4x^2y^3 \cdot 1 = 4x^2y^3$ 

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Una expresión elevada a la potencia cero no es igual a 0; es igual a 1.

CORRECTO

$$x^0 = 1$$

$$5^0 = 1$$

INCORRECTO

~~$$x^0 = 0$$~~

~~$$5^0 = 0$$~~

Explicaremos la **regla de la potencia** con ayuda del ejemplo 9.

EJEMPLO 9 Simplifique $(x^3)^2$.

Solución

$$(x^3)^2 = \underbrace{x^3 \cdot x^3}_{2 \text{ factores de } x^3} = x^{3+3} = x^6$$



Regla de la potencia para los exponentes

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

La regla de la potencia indica que cuando una expresión que ya está elevada a una potencia es elevada a otra potencia, se conserva la base y *se multiplican* los exponentes. El ejemplo 9 también hubiera podido simplificarse con el empleo de la regla de la potencia: $(x^3)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$.

EJEMPLO 10**Solución**Simplificar. **a)** $(x^3)^5$ **b)** $(3^4)^2$ **c)** $(y^5)^7$

a) $(x^3)^5 = x^{3 \cdot 5} = x^{15}$

b) $(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$

c) $(y^5)^7 = y^{5 \cdot 7} = y^{35}$ 

SUGERENCIAAHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 51

Con frecuencia los estudiantes confunden las reglas del producto y de la potencia. Observe con cuidado la diferencia.

Regla del producto

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$$

$$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$$

Regla de la potencia

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n}$$

$$(2^3)^5 = 2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$$

El ejemplo 11 será útil para explicar la **regla de la potencia expandida**. Como el nombre sugiere, ésta es una expansión de la regla de la potencia.

EJEMPLO 11**Solución**Simplificar $\left(\frac{ax}{by}\right)^4$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{ax}{by}\right)^4 &= \frac{ax}{by} \cdot \frac{ax}{by} \cdot \frac{ax}{by} \cdot \frac{ax}{by} \\ &= \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x}{b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y} = \frac{a^4 \cdot x^4}{b^4 \cdot y^4} = \frac{a^4 x^4}{b^4 y^4} \end{aligned}$$


Regla de la potencia expandida para exponentes

$$\left(\frac{ax}{by}\right)^m = \frac{a^m x^m}{b^m y^m}, \quad b \neq 0, y \neq 0$$

La regla de la potencia expandida indica que elevamos cada factor dentro del paréntesis a la potencia indicada fuera de éste cuando simplificamos la expresión.

EJEMPLO 12

Simplifique cada expresión.

a) $(4x)^2$

b) $(-x)^3$

c) $(5xy)^3$

d) $\left(\frac{-3y}{2z}\right)^2$

Solución

a) $(4x)^2 = 4^2 x^2 = 16x^2$

b) $(-x)^3 = (-1x)^3 = (-1)^3 x^3 = -1x^3 = -x^3$

c) $(5xy)^3 = 5^3 x^3 y^3 = 125x^3 y^3$

d) $\left(\frac{-3y}{2z}\right)^2 = \frac{(-3)^2 y^2}{2^2 z^2} = \frac{9y^2}{4z^2}$ 

3 Simplificar una expresión antes de utilizar la regla de la potencia expandida

Siempre que tengamos una expresión elevada a una potencia, es útil simplificar lo que esté dentro del paréntesis antes de emplear la regla de la potencia expandida. Ilustramos este procedimiento en los ejemplos 13 y 14.

EJEMPLO 13 Simplificar $\left(\frac{9x^3y^2}{3xy^2}\right)^3$.

Solución En primer lugar simplificamos la expresión dentro del paréntesis, dividiendo los factores comunes.

$$\left(\frac{9x^3y^2}{3xy^2}\right)^3 = \left(\frac{9}{3} \cdot \frac{x^3}{x} \cdot \frac{y^2}{y^2}\right)^3 = (3x^2)^3$$

Ahora utilizamos la regla de la potencia expandida para terminar.

$$(3x^2)^3 = 3^3(x^2)^3 = 27x^6$$

Por tanto, $\left(\frac{9x^3y^2}{3xy^2}\right)^3 = 27x^6$.



SUGERENCIA

CONSEJO PARA ESTUDIAR

Sea muy cuidadoso al escribir los exponentes. Por lo general son más pequeños que el resto del texto; tómese su tiempo, escríbalos con claridad y colóquelos en forma apropiada. Si no los escribimos con claridad es muy fácil confundir algunos de ellos, como 2 con 3, 1 con 4, o 0 con 6. Si escribimos o llevamos un exponente de un paso a otro de manera incorrecta, obtendremos una respuesta equivocada.

EJEMPLO 14 Simplificar $\left(\frac{25x^4y^3}{5x^2y^7}\right)^4$.

Solución Comenzamos por simplificar la expresión dentro del paréntesis.

$$\left(\frac{25x^4y^3}{5x^2y^7}\right)^4 = \left(\frac{25}{5} \cdot \frac{x^4}{x^2} \cdot \frac{y^3}{y^7}\right)^4 = \left(\frac{5x^2}{y^4}\right)^4$$

Ahora utilizamos la regla de la potencia expandida para terminar.

$$\left(\frac{5x^2}{y^4}\right)^4 = \frac{5^4(x^2)^4}{(y^4)^4} = \frac{625x^8}{y^{16}}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 91**

Por tanto, $\left(\frac{25x^4y^3}{5x^2y^7}\right)^4 = \frac{625x^8}{y^{16}}$.



CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

En ocasiones los estudiantes cometen errores al simplificar expresiones que contienen exponentes. Uno de los más comunes es el siguiente. Estúdielo con cuidado para asegurarse de no cometerlo.

CORRECTO

$$\frac{4}{2x} = \frac{\frac{2}{1}\cancel{4}}{\cancel{2}x} = \frac{2}{x}$$

$$\frac{x}{xy} = \frac{\cancel{x}\frac{1}{1}}{\cancel{x}y} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{5x^3y^2}{y^2} = \frac{5x^3\cancel{y^2}^1}{\cancel{y^2}_1} = 5x^3$$

INCORRECTO

$$\frac{4}{x+2} = \frac{\frac{2}{1}\cancel{4}}{x+\cancel{2}_1} = \frac{2}{x+1}$$

$$\frac{x}{x+y} = \frac{\cancel{x}\frac{1}{1}}{\cancel{x}+y} = \frac{1}{1+y}$$

$$\frac{5x^3+y^2}{y^2} = \frac{5x^3+\cancel{y^2}^1}{\cancel{y^2}_1} = 5x^3+1$$

(continúa en la página siguiente)

Las simplificaciones del lado derecho no son correctas porque sólo los *factores* comunes se pueden dividir (recuerde que los factores se multiplican entre sí). En el primer denominador de la derecha, $x + 2$, la x y el 2 son términos, no factores, puesto que se están sumando. En forma similar, en el segundo denominador, $x + y$, la x y la y son términos y no factores, ya que se están sumando. Asimismo, en el numerador $5x^3 + y^2$, el $5x^3$ y la y^2 son términos, no factores. No es posible dividir ningún factor común en las fracciones del lado derecho.

EJEMPLO 15 Simplificar $(3y^3z^2)^4(2y^4z)$

Solución En primer lugar simplificamos $(3y^3z^2)^4$ por medio de la regla de la potencia expandida.

$$(3y^3z^2)^4 = 3^4y^{3 \cdot 4}z^{2 \cdot 4} = 81y^{12}z^8$$

Ahora empleamos la regla del producto para simplificar aún más.

$$\begin{aligned}(3y^3z^2)^4(2y^4z) &= (81y^{12}z^8)(2y^4z^1) \\ &= 81 \cdot 2 \cdot y^{12} \cdot y^4 \cdot z^8 \cdot z^1 \\ &= 162y^{12+4}z^{8+1} \\ &= 162y^{16}z^9\end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 125**

Por tanto, $(3y^3z^2)^4(2y^4z) = 162y^{16}z^9$.



Resumen de las reglas de los exponentes que presentamos en esta sección

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

Regla del producto

2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$

Regla del cociente

3. $x^0 = 1, \quad x \neq 0$

Regla del exponente cero

4. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$

Regla de la potencia

5. $\left(\frac{ax}{by}\right)^m = \frac{a^m x^m}{b^m y^m}, \quad b \neq 0, \quad y \neq 0$

Regla de la potencia expandida

Conjunto de ejercicios 4.1

Ejercicios conceptuales

1. En la expresión exponencial c^r , ¿cómo se denomina a la c ?, ¿cuál es el nombre de la r ?
2. **a)** Escriba la regla del producto para exponentes.
b) Explique con sus propias palabras la regla del producto.
3. **a)** Escriba la regla del cociente para exponentes.
b) Con sus propias palabras, explique la regla del cociente.
4. **a)** Escriba la regla del exponente cero.
b) Con sus propias palabras, explique la regla del exponente cero.
5. **a)** Escriba la regla de la potencia para exponentes.
b) Explique con sus propias palabras la regla de la potencia.
6. **a)** Escriba la regla de la potencia expandida para exponentes.
b) Con sus propias palabras, explique la regla de la potencia expandida.
7. Para qué valor de x es $x^0 \neq 1$?
8. Explique la diferencia entre la regla del producto y la de la potencia. Proporcione un ejemplo de cada uno.

Práctica de habilidades

Simplifique las siguientes expresiones.

9. $x^5 \cdot x^4$

10. $x^6 \cdot x$

11. $z^4 \cdot z$

12. $x^4 \cdot x^2$

13. $3^2 \cdot 3^3$

14. $4^2 \cdot 4^3$

15. $y^3 \cdot y^2$

16. $x^3 \cdot x^4$

17. $z^3 \cdot z^5$

18. $2^2 \cdot 2^2$

19. $y^6 \cdot y$

20. $x^4 \cdot x^4$

Simplifique las siguientes expresiones.

21. $\frac{6^2}{6}$

22. $\frac{x^4}{x^3}$

23. $\frac{x^{10}}{x^3}$

24. $\frac{y^5}{y}$

25. $\frac{3^5}{3^2}$

26. $\frac{4^5}{4^3}$

27. $\frac{y^4}{y^6}$

28. $\frac{a^7}{a^9}$

29. $\frac{c^4}{c^4}$

30. $\frac{3^4}{3^4}$

31. $\frac{a^3}{a^7}$

32. $\frac{x^9}{x^{13}}$

Simplifique las siguientes expresiones.

33. x^0

34. 5^0

35. $3x^0$

36. $-4x^0$

37. $4(5d)^0$

38. $-2(4x)^0$

39. $-3(-4y)^0$

40. $-(-x)^0$

41. $5x^3yz^0$

42. $-5xy^2z^0$

43. $-5r(st)^0$

44. $-3(a^2b^5c^3)^0$

Simplifique las siguientes expresiones.

45. $(x^4)^2$

46. $(x^5)^3$

47. $(x^5)^5$

48. $(y^5)^2$

49. $(x^3)^1$

50. $(x^3)^2$

51. $(x^4)^3$

52. $(x^5)^4$

53. $(n^6)^3$

54. $(2w^2)^3$

55. $(1.3x)^2$

56. $(-3x)^2$

57. $(-3x^3)^3$

58. $(xy)^4$

59. $(3a^2b^4)^3$

60. $(4x^3y^2)^3$

Simplifique las siguientes expresiones.

61. $\left(\frac{x}{3}\right)^2$

62. $\left(\frac{2}{x}\right)^3$

63. $\left(\frac{y}{x}\right)^4$

64. $\left(\frac{3}{y}\right)^4$

65. $\left(\frac{6}{x}\right)^3$

66. $\left(\frac{4m}{n}\right)^3$

67. $\left(\frac{3x}{y}\right)^3$

68. $\left(\frac{3s}{t^2}\right)^2$

69. $\left(\frac{4p}{5}\right)^2$

70. $\left(\frac{3x^4}{y}\right)^3$

71. $\left(\frac{2y^3}{x}\right)^4$

72. $\left(\frac{-4x^2}{5}\right)^2$

Simplifique las siguientes expresiones.

73. $\frac{x^6y}{xy^3}$

74. $\frac{x^3y^5}{x^7y}$

75. $\frac{10x^3y^8}{2xy^{10}}$

76. $\frac{5x^{12}y^2}{10xy^9}$

77. $\frac{3ab}{27a^3b^4}$

78. $\frac{30y^5z^3}{5yz^6}$

79. $\frac{35x^4y^9}{15x^9y^{12}}$

80. $\frac{6m^3n^9}{9m^7n^{12}}$

81. $-\frac{36xy^7z}{12x^4y^5z}$

82. $\frac{4x^4y^7z^3}{32x^5y^4z^9}$

83. $-\frac{6x^2y^7z}{3x^5y^9z^6}$

84. $-\frac{25x^4y^{10}}{30x^3y^7z}$

Simplifique las siguientes expresiones.

85. $\left(\frac{10x^4}{5x^6}\right)^3$

86. $\left(\frac{4x^4}{8x^8}\right)^3$

87. $\left(\frac{6y^6}{2y^3}\right)^3$

88. $\left(\frac{25s^4t}{5s^6t^4}\right)^3$

89. $\left(\frac{9a^2b^4}{3a^7b^9}\right)^0$

90. $\left(\frac{16y^6}{24y^{10}}\right)^3$

91. $\left(\frac{x^4y^3}{x^2y^5}\right)^2$

92. $\left(\frac{2x^7y^2}{4xy}\right)^3$

93. $\left(\frac{9y^2z^7}{18y^9z^4}\right)^4$

94. $\left(\frac{y^7z^5}{y^8z^4}\right)^{10}$

95. $\left(\frac{4xy^5}{y}\right)^3$

96. $\left(\frac{-64xy^6}{32xy^9}\right)^4$

Simplifique las siguientes expresiones.

97. $(5xy^4)^2$

98. $(4ab^3)^3$

99. $(3ab^3)(b)$

100. $(6xy^5)(3x^2y^4)$

101. $(-2xy)(3xy)$

102. $(-2x^4y^2)(5x^2y)$

103. $(5x^2y)(3xy^5)$

104. $(-5xy)(-2xy^6)$

105. $(-3p^2q)^2(-p^2q)$

106. $(2c^3d^2)^2(3cd)^0$

107. $(5r^3s^2)^2(5r^3s^4)^0$

108. $(3x^2)^4(2xy^5)$

Simplifique las siguientes expresiones.

109. $(-x)^2$

110. $(2xy^4)^3$

111. $\left(\frac{x^5y^5}{xy^5}\right)^3$

112. $(2x^2y^5)(3x^5y^4)^3$

113. $(2.5x^3)^2$

114. $(-3a^2b^3c^4)^3$

115. $\frac{x^7y^2}{xy^6}$

116. $(xy^4)(xy^4)^3$

117. $\left(-\frac{m^4}{n^3}\right)^3$

118. $\left(-\frac{12x}{16x^7y^2}\right)^2$

119. $(-6x^3y^2)^3$

120. $(3x^6y)^2(4xy^8)$

121. $(-2x^4y^2z)^3$

122. $\left(\frac{x}{3}\right)^2$

123. $(9r^4s^5)^3$

124. $(5x^4z^{10})^2(2x^2z^8)$

125. $(4x^2y)(3xy^2)^3$

126. $\frac{x^2y^6}{x^4y}$

127. $(7.3x^2y^4)^2$

128. $\left(\frac{-3x^3}{4}\right)^3$

129. $(x^7y^5)(xy^2)^4$

130. $(4c^3d^2)(2c^5d^3)^2$

131. $\left(\frac{-x^4z^7}{x^2z^5}\right)^4$

132. $(x^4y^6)^3(3x^2y^5)$

Estudie el recuadro de *Cómo evitar errores comunes de la página 247*. Simplifique las expresiones siguientes eliminando los factores comunes con una división. Si no fuera posible simplificar la expresión de este modo, indíquelo.

133. $\frac{x + y}{x}$

134. $\frac{xy}{x}$

135. $\frac{y^2 + 3}{y}$

136. $\frac{x + 4}{2}$

137. $\frac{6yz^4}{yz^2}$

138. $\frac{a^2 + b^2}{a^2}$

139. $\frac{x}{x + 1}$

140. $\frac{x^4}{x^2y}$

Solución de problemas

141. ¿Cuál es el valor de x^2y , si $x = 4$ y $y = 2$?

142. ¿Cuál es el valor de xy^2 , si $x = -3$ y $y = -4$?

143. ¿Cuál es el valor de $(xy)^0$, si $x = 2$ y $y = 4$?

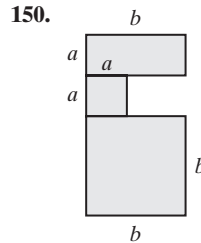
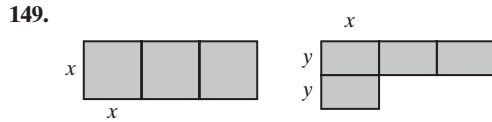
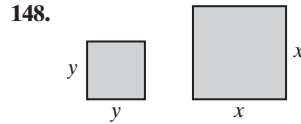
144. ¿Cuál es el valor de $(xy)^0$, si $x = -5$ y $y = 3$?

145. Considere la expresión $(-x^5y^7)^9$. Si utilizamos la regla de la potencia expandida para simplificar esta expresión, ¿el

signo de la expresión simplificada será positivo o negativo? Explique cómo determinó su respuesta.

146. Considere la expresión $(-9x^4y^6)^8$. Si utilizamos la regla de la potencia expandida para simplificar la expresión, ¿el signo de la expresión simplificada será positivo o negativo? Explique cómo determinó su respuesta.

Escriba una expresión para calcular el área total de la figura o figuras que se muestran.



Problemas de reto

Simplifique las siguientes expresiones.

151. $\left(\frac{3x^4y^5}{6x^6y^8}\right)^3 \left(\frac{9x^7y^8}{3x^3y^5}\right)^2$

152. $(3yz^2)^2 \left(\frac{2y^3z^5}{10y^6z^4}\right)^0 (4y^2z^3)^3$



Actividad en grupo

Como grupo, estudien y resuelvan el ejercicio 153, de acuerdo con las instrucciones.

153. En la siguiente sección trabajaremos con exponentes negativos. Como preparación, utilice la expresión $\frac{3^2}{3^3}$ para los incisos del **a)** al **c)**. Resuelva en forma individual los incisos **a)** a **d)**, después el **e)** como grupo.

- Elimine los factores comunes en el numerador y el denominador y determine el valor de la expresión.
- Utilice la regla del cociente en la expresión dada y escriba los resultados.

- Escriba un enunciado de igualdad empleando los incisos **a)** y **b)** anteriores.

- Repita los incisos del **a)** al **c)** para la expresión $\frac{2^3}{2^4}$.

- Como grupo, comparen las respuestas de los incisos **a)** a **d)**, y luego escriban una expresión exponencial para $\frac{1}{x^m}$.

Ejercicios de repaso acumulativo

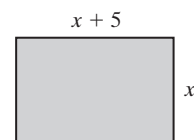
[1.9] 154. Evalúe la expresión $3^4 \div 3^3 - (5 - 8) + 7$.

[2.1] 155. Simplifique la expresión $-4(x - 3) + 5x - 2$.

[2.5] 156. Resuelva la ecuación

$$2(x + 4) - 3 = 5x + 4 - 3x + 1.$$

- [3.1] 157. **a)** Utilice la fórmula $P = 2l + 2a$ para calcular la longitud de los lados del rectángulo que se muestra, si el perímetro del rectángulo mide 26 pulgadas.



- b)** Emplee la fórmula $P = 2l + 2a$ para resolver la ecuación a .

4.2 EXPONENTES NEGATIVOS



- 1 Entender la regla del exponente negativo.
- 2 Simplificar expresiones que contienen exponentes negativos.

1 Entender la regla del exponente negativo

Una regla adicional que involucra a los exponentes, es la del exponente negativo. Necesitamos entender los exponentes negativos para tener éxito con la notación científica que estudiaremos en la siguiente sección.

Desarrollaremos la regla del exponente negativo por medio de la regla del cociente, que ilustramos en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Simplifique la expresión x^3/x^5 , **a)** con la regla del cociente, y **b)** con la división de los factores comunes.

Solución

a) Con la regla del cociente,

$$\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2}$$

b) Con la división de los factores comunes,

$$\frac{x^3}{x^5} = \frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x}}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot x} = \frac{1}{x^2}$$



En el ejemplo 1, vemos que x^3/x^5 es igual tanto a x^{-2} como a $1/x^2$. Por tanto, x^{-2} debe ser igual a $1/x^2$; es decir, $x^{-2} = 1/x^2$. Éste es un ejemplo de la **regla del exponente negativo**.

Regla del exponente negativo

$$x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad x \neq 0$$

Cuando elevamos una variable o número a un exponente negativo, podemos reescribir como 1 dividido entre la variable o número elevados al mismo exponente, pero con signo positivo.

Ejemplos

$$\begin{aligned} x^{-6} &= \frac{1}{x^6} & 4^{-2} &= \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16} \\ y^{-7} &= \frac{1}{y^7} & 5^{-3} &= \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125} \end{aligned}$$

CÓMO EVITAR
ERRORES COMUNES

En ocasiones los estudiantes creen que un exponente negativo hace automáticamente que el valor de la expresión sea negativo. Eso no es verdad.

EXPRESIÓN

CORRECTO

INCORRECTO

TAMBIÉN INCORRECTO

$$3^{-2}$$

$$\frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

~~$$-3^2$$~~

~~$$-\frac{1}{3^2}$$~~

$$x^{-3}$$

$$\frac{1}{x^3}$$

~~$$-x^3$$~~

~~$$-\frac{1}{x^3}$$~~

Para ayudarlo apreciar que la regla del exponente negativo tiene sentido, considere la siguiente secuencia de expresiones exponenciales y sus valores correspondientes.

$$2^3 = 8, \quad 2^2 = 4, \quad 2^1 = 2, \quad 2^0 = 1, \quad 2^{-1} = \frac{1}{2^1} \text{ o bien } \frac{1}{2}, \quad 2^{-2} = \frac{1}{2^2} \text{ o bien } \frac{1}{4}, \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} \text{ o bien } \frac{1}{8}$$

Observe que cada vez que el exponente disminuye una unidad, el valor de la expresión se reduce a la mitad. Por ejemplo, si pasamos de 2^3 a 2^2 , el valor de la expresión disminuye de 8 a 4. Si continuamos con la disminución de los exponentes más allá de $2^0 = 1$, entonces el exponente que sigue en el patrón es -1 . Y obtenemos la mitad de 1 que es $\frac{1}{2}$. Este patrón ilustra que $x^{-m} = \frac{1}{x^m}$.

2 Simplificar expresiones que contienen exponentes negativos

Por lo general, cuando simplifique una expresión exponencial, **la respuesta final no debe contener exponentes negativos**. Podemos simplificar expresiones exponenciales utilizando la regla del exponente negativo y las reglas presentadas en la sección anterior. Los siguientes ejemplos indican la manera de simplificar expresiones exponenciales que contienen exponentes negativos.

EJEMPLO 2 Utilice la regla del exponente negativo para escribir cada expresión con un exponente positivo. Simplifique las expresiones siempre que sea posible.

a) x^{-3} b) y^{-4} c) 3^{-2} d) 5^{-1} e) -5^{-3} f) $(-5)^{-3}$

Solución

a) $x^{-3} = \frac{1}{x^3}$

b) $y^{-4} = \frac{1}{y^4}$

c) $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$

d) $5^{-1} = \frac{1}{5}$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 11**

e) $-5^{-3} = -\frac{1}{5^3} = -\frac{1}{125}$

f) $(-5)^{-3} = \frac{1}{(-5)^3} = \frac{1}{-125} = -\frac{1}{125}$ 

EJEMPLO 3 Utilice la regla del exponente negativo para escribir cada expresión con un exponente positivo.

a) $\frac{1}{x^{-2}}$ b) $\frac{1}{4^{-1}}$

Solución

En primer lugar, utilizamos la regla del exponente negativo en el denominador. Después, termine la operación.

a) $\frac{1}{x^{-2}} = \frac{1}{1/x^2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{x^2}{1} = x^2$

b) $\frac{1}{4^{-1}} = \frac{1}{1/4} = \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{1} = 4$ 

SUGERENCIA

De los ejemplos 2 y 3, observamos que cuando un factor pasa del denominador al numerador o del numerador al denominador, el signo del *exponente* cambia.

$$x^{-4} = \frac{1}{x^4}$$

$$\frac{1}{x^{-4}} = x^4$$

$$3^{-5} = \frac{1}{3^5}$$

$$\frac{1}{3^{-5}} = 3^5$$

Ahora resolveremos ejemplos adicionales en los que combinamos dos o más de las reglas que hemos presentado hasta este momento.

EJEMPLO 4 Simplifique las expresiones. **a)** $(z^{-5})^4$ **b)** $(4^2)^{-3}$

Solución

a) $(z^{-5})^4 = z^{(-5)(4)}$ *Por la regla de la potencia.*
 $= z^{-20}$
 $= \frac{1}{z^{20}}$ *Por la regla del exponente negativo.*

b) $(4^2)^{-3} = 4^{(2)(-3)}$ *Por la regla de la potencia.*
 $= 4^{-6}$
 $= \frac{1}{4^6}$ *Por la regla del exponente negativo.*

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 25



EJEMPLO 5 Simplifique las expresiones. **a)** $x^3 \cdot x^{-5}$ **b)** $3^{-4} \cdot 3^{-7}$

Solución

a) $x^3 \cdot x^{-5} = x^{3+(-5)}$ *Por la regla del producto.*
 $= x^{-2}$
 $= \frac{1}{x^2}$ *Por la regla del exponente negativo.*

b) $3^{-4} \cdot 3^{-7} = 3^{-4+(-7)}$ *Por la regla del producto.*
 $= 3^{-11}$
 $= \frac{1}{3^{11}}$ *Por la regla del exponente negativo.*

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 51



CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

¿Cuánto vale la suma de $3^2 + 3^{-2}$? Estudie con cuidado la solución correcta.

CORRECTO

INCORRECTO

$$\begin{aligned} 3^2 + 3^{-2} &= 9 + \frac{1}{9} \\ &= 9\frac{1}{9} \end{aligned}$$

~~$$3^2 + 3^{-2} = 0$$~~

Observe que $3^2 \cdot 3^{-2} = 3^{2+(-2)} = 3^0 = 1$.

EJEMPLO 6 Simplifique las expresiones. **a)** $\frac{z^{-6}}{z^{12}}$ **b)** $\frac{5^{-7}}{5^{-4}}$

Solución

a) $\frac{z^{-6}}{z^{12}} = z^{-6-12}$ *Por la regla del cociente.*
 $= z^{-18}$
 $= \frac{1}{z^{18}}$ *Por la regla del exponente negativo.*

b) $\frac{5^{-7}}{5^{-4}} = 5^{-7-(-4)}$ *Por la regla del cociente.*
 $= 5^{-7+4}$
 $= 5^{-3}$
 $= \frac{1}{5^3}$ o bien $\frac{1}{125}$ *Por la regla del exponente negativo.*

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 81



Debe leer cuidadosamente la siguiente Sugerencia

SUGERENCIA

Consideremos un problema de división en el que una variable tenga un exponente negativo ya sea en el numerador o en el denominador, como en el ejemplo 6a). Otra manera de simplificarla sería pasar la variable con el exponente negativo del numerador al denominador, o viceversa, y cambiamos el signo de ese exponente. Por ejemplo,

$$\frac{x^{-4}}{x^5} = \frac{1}{x^5 \cdot x^4} = \frac{1}{x^{5+4}} = \frac{1}{x^9}$$

$$\frac{y^3}{y^{-7}} = y^3 \cdot y^7 = y^{3+7} = y^{10}$$

Ahora consideremos un problema de división en el que un número o variable tenga exponente negativo en ambos, tanto en el numerador o como en el denominador, como en el ejemplo 6b). Otra manera de simplificar una expresión como ésta sería pasar la variable con el exponente negativo mayor del numerador al denominador, o del denominador al numerador, y cambiamos de negativo a positivo el signo del exponente. Por ejemplo,

$$\frac{x^{-8}}{x^{-3}} = \frac{1}{x^8 \cdot x^{-3}} = \frac{1}{x^{8-3}} = \frac{1}{x^5} \quad \text{Observe que } -8 < -3.$$

$$\frac{y^{-4}}{y^{-7}} = y^7 \cdot y^{-4} = y^{7-4} = y^3 \quad \text{Note que } -7 < -4.$$

EJEMPLO 7

Simplifique las expresiones. a) $7x^4(6x^{-9})$

b) $\frac{16r^3s^{-3}}{8rs^2}$

c) $\frac{2x^2y^5}{8x^7y^{-3}}$

Solución

a) $7x^4(6x^{-9}) = 7 \cdot 6 \cdot x^4 \cdot x^{-9} = 42x^{-5} = \frac{42}{x^5}$

b) $\frac{16r^3s^{-3}}{8rs^2} = \frac{16}{8} \cdot \frac{r^3}{r} \cdot \frac{s^{-3}}{s^2}$
 $= 2 \cdot r^2 \cdot \frac{1}{s^5} = \frac{2r^2}{s^5}$

c) $\frac{2x^2y^5}{8x^7y^{-3}} = \frac{2}{8} \cdot \frac{x^2}{x^7} \cdot \frac{y^5}{y^{-3}}$
 $= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^5} \cdot y^8 = \frac{y^8}{4x^5}$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 119



En el ejemplo 7b), pasamos la variable con el exponente negativo, s^{-3} , del numerador al denominador. En el ejemplo 7c), pasamos del denominador al numerador la variable con el exponente negativo, y^{-3} . En cada caso, al mover al factor variable cambiamos el signo del exponente de negativo a positivo.

EJEMPLO 8

Simplifique $(5x^{-3})^{-2}$.

Solución

Empleando la regla de la potencia expandida.

$$(5x^{-3})^{-2} = 5^{-2}x^{(-3)(-2)}$$

$$= 5^{-2}x^6$$

$$= \frac{1}{5^2}x^6$$

$$= \frac{x^6}{25}$$



CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

¿Puede explicar por qué es incorrecta la simplificación que se muestra en el lado derecho?

CORRECTO

$$\frac{x^3 y^{-2}}{w} = \frac{x^3}{w y^2}$$

INCORRECTO

$$\frac{x^3 + y^{-2}}{w} = \frac{x^3}{w + y^2}$$

La simplificación del lado derecho es incorrecta porque en el numerador $x^3 + y^{-2}$, la y^{-2} no es un factor, sino un término. Aprenderemos a simplificar expresiones como ésta cuando estudiemos fracciones complejas en la sección 6.5.

EJEMPLO 9 Simplificar $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

Solución De acuerdo con la regla de la potencia expandida, escribimos

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{2^{-2}}{3^{-2}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^2} \cdot \frac{3^2}{1} = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4}$$

Si examinamos los resultados del ejemplo 7 vemos que

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{-2} = \frac{3^2}{2^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Este ejemplo ilustra que $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$ si $a \neq 0$ y $b \neq 0$. Así, por ejemplo,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{3}\right)^5 \text{ y } \left(\frac{5}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{5}\right)^3. \text{ Resumimos esta información como sigue:}$$

Regla de una fracción elevada a un exponente negativo

Para una fracción de la forma $\frac{a}{b}$, $a \neq 0$ y $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$.

EJEMPLO 10 Simplificar **a)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ **b)** $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-4}$

Solución Utilizamos la regla anterior para simplificar.

ahora resuelva el ejercicio 95 **a)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27}$ **b)** $\left(\frac{x^2}{y^3}\right)^{-4} = \left(\frac{y^3}{x^2}\right)^4 = \frac{y^{3 \cdot 4}}{x^{2 \cdot 4}} = \frac{y^{12}}{x^8}$

EJEMPLO 11 Simplificar **a)** $\left(\frac{x^2 y^{-3}}{z^4}\right)^{-5}$ **b)** $\left(\frac{2x^{-3} y^2 z}{x^2}\right)^2$

Solución **a)** Resolveremos el inciso **a)** con dos métodos diferentes. En el primero, emplearemos la regla de la potencia expandida. En el segundo, utilizaremos la regla de una fracción elevada a un exponente negativo antes de utilizar la regla de la potencia expandida. Usted puede usar cualquier método.

Método 1

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 y^{-3}}{z^4}\right)^{-5} &= \frac{x^{2(-5)} y^{(-3)(-5)}}{z^{4(-5)}} && \text{Regla de la potencia expandida.} \\ &= \frac{x^{-10} y^{15}}{z^{-20}} && \text{Multiplicar los exponentes.} \\ &= \frac{y^{15} z^{20}}{x^{10}} && \text{Regla del exponente negativo.} \end{aligned}$$

Método 2

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{x^2 y^{-3}}{z^4} \right)^{-5} &= \left(\frac{z^4}{x^2 y^{-3}} \right)^5 & \left(\frac{a}{b} \right)^{-m} &= \left(\frac{b}{a} \right)^m \\
 &= \left(\frac{y^3 z^4}{x^2} \right)^5 & \text{Simplificar la expresión entre} \\
 & & \text{paréntesis.} \\
 &= \frac{y^{3 \cdot 5} z^{4 \cdot 5}}{x^{2 \cdot 5}} & \text{Regla de la potencia expandida.} \\
 &= \frac{y^{15} z^{20}}{x^{10}} & \text{Multiplicar los exponentes.}
 \end{aligned}$$

b) Primero simplificamos la expresión entre paréntesis, después elevamos al cuadrado los resultados. Para simplificar, observamos que $\frac{x^{-3}}{x^2}$ se convierte en $\frac{1}{x^5}$.

$$\left(\frac{2x^{-3}y^2z}{x^2} \right)^2 = \left(\frac{2y^2z}{x^5} \right)^2 = \frac{2^2 y^{2 \cdot 2} z^{1 \cdot 2}}{x^{5 \cdot 2}} = \frac{4y^4 z^2}{x^{10}}$$



Resumen de reglas de los exponentes

- | | |
|---|--|
| 1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$ | regla del producto |
| 2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$ | regla del cociente |
| 3. $x^0 = 1, \quad x \neq 0$ | regla del exponente cero |
| 4. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$ | regla de las potencias |
| 5. $\left(\frac{ax}{by} \right)^m = \frac{a^m x^m}{b^m y^m}, \quad b \neq 0, y \neq 0$ | regla de la potencia expandida |
| 6. $x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad x \neq 0$ | regla del exponente negativo |
| 7. $\left(\frac{a}{b} \right)^{-m} = \left(\frac{b}{a} \right)^m, \quad a \neq 0, b \neq 0$ | regla de una fracción elevada a un exponente negativo |

Conjunto de ejercicios 4.2

Ejercicios conceptuales

- Con sus propias palabras, describa la regla del exponente negativo.
- ¿Está simplificada la expresión x^{-2} ? Si no lo estuviera, simplifíquela.
- ¿Está simplificada la expresión $x^5 y^{-3}$? Si no lo estuviera, simplifíquela.
- ¿La expresión $a^6 b^{-2}$ puede simplificarse a $1/a^6 b^{-2}$? Si no fuera posible, ¿cuál sería la simplificación correcta? Explique su respuesta.
- ¿La expresión $(y^4)^{-3}$ puede simplificarse a $1/y^7$? Si no es posible, ¿cuál es la simplificación correcta? Explique.
- ¿Las siguientes expresiones están simplificadas? Si una expresión no lo estuviera, explique por qué y luego simplifíquela.

a) $\frac{5}{x^3}$	b) n^{-5}
c) $\frac{a^{-4}}{2}$	d) $\frac{x^{-4}}{x^4}$
- a) Identifique los términos en el numerador de la expresión $\frac{x^5 y^2}{z^3}$.

- b) Identifique los factores en el numerador de la expresión.
8. a) Identifique los términos en el numerador de la expresión $\frac{x^{-4}y^3}{z^5}$.
- b) Identifique los factores en el numerador de la expresión.
9. Describa lo que sucede al exponente de un factor cuando éste pasa del numerador al denominador de una fracción.
10. Diga lo que ocurre al exponente de un factor cuando éste se lleva del denominador al numerador de una fracción.

Práctica de habilidades

Simplifique las expresiones siguientes.

- | | | | |
|-----------------------------|-------------------------------|-----------------------------|--------------------------|
| 11. x^{-6} | 12. y^{-5} | 13. 5^{-1} | 14. 5^{-2} |
| 15. $\frac{1}{x^{-3}}$ | 16. $\frac{1}{b^{-4}}$ | 17. $\frac{1}{x^{-1}}$ | 18. $\frac{1}{y^{-4}}$ |
| 19. $\frac{1}{6^{-2}}$ | 20. $\frac{1}{5^{-3}}$ | 21. $(x^{-2})^3$ | 22. $(m^{-5})^{-2}$ |
| 23. $(y^{-5})^4$ | 24. $(a^5)^{-4}$ | 25. $(x^4)^{-2}$ | 26. $(x^{-9})^{-2}$ |
| 27. $(2^{-2})^{-3}$ | 28. $(2^{-3})^2$ | 29. $y^4 \cdot y^{-2}$ | 30. $x^{-3} \cdot x^1$ |
| 31. $x^7 \cdot x^{-5}$ | 32. $d^{-3} \cdot d^{-4}$ | 33. $3^{-2} \cdot 3^4$ | 34. $6^{-3} \cdot 6^6$ |
| 35. $\frac{r^5}{r^6}$ | 36. $\frac{x^2}{x^{-1}}$ | 37. $\frac{p^0}{p^{-3}}$ | 38. $\frac{x^{-2}}{x^5}$ |
| 39. $\frac{x^{-7}}{x^{-3}}$ | 40. $\frac{z^{-11}}{z^{-12}}$ | 41. $\frac{3^2}{3^{-1}}$ | 42. $\frac{4^2}{4^{-1}}$ |
| 43. 3^{-3} | 44. x^{-7} | 45. $\frac{1}{z^{-9}}$ | 46. $\frac{1}{3^{-3}}$ |
| 47. $(p^{-4})^{-6}$ | 48. $(x^{-3})^{-4}$ | 49. $(y^{-2})^{-3}$ | 50. $z^9 \cdot z^{-12}$ |
| 51. $x^3 \cdot x^{-7}$ | 52. $x^{-3} \cdot x^{-5}$ | 53. $x^{-8} \cdot x^{-7}$ | 54. $4^{-3} \cdot 4^3$ |
| 55. -4^{-2} | 56. $(-4)^{-2}$ | 57. $-(-4)^{-2}$ | 58. -4^{-3} |
| 59. $(-4)^{-3}$ | 60. $-(-4)^{-3}$ | 61. $(-6)^{-2}$ | 62. -6^{-2} |
| 63. $\frac{x^{-5}}{x^5}$ | 64. $\frac{y^6}{y^{-8}}$ | 65. $\frac{n^{-5}}{n^{-7}}$ | 66. $\frac{3^{-4}}{3}$ |
| 67. $\frac{2^{-3}}{2^{-3}}$ | 68. $(5a^2b^3)^0$ | 69. $(2^{-1} + 3^{-1})^0$ | 70. $(3^{-1} + 4^2)^0$ |
| 71. $\frac{2}{2^{-5}}$ | 72. $(z^{-5})^{-9}$ | 73. $(x^{-4})^{-2}$ | 74. $(x^{-7})^0$ |
| 75. $(x^0)^{-2}$ | 76. $(3^{-2})^{-1}$ | 77. $2^{-3} \cdot 2$ | 78. $6^4 \cdot 6^{-2}$ |
| 79. $6^{-4} \cdot 6^2$ | 80. $\frac{z^{-3}}{z^{-7}}$ | 81. $\frac{x^{-1}}{x^{-4}}$ | 82. $\frac{r^6}{r}$ |
| 83. $(4^2)^{-1}$ | 84. $(4^{-2})^{-2}$ | 85. $\frac{5}{5^{-2}}$ | 86. $\frac{x^6}{x^7}$ |

87. $\frac{3^{-4}}{3^{-2}}$

88. $x^{-10} \cdot x^8$

89. $\frac{7^{-1}}{7^{-1}}$

90. $2x^{-1}y$

91. $(6x^2)^{-2}$

92. $(3z^3)^{-2}$

93. $3x^{-2}y^2$

94. $5x^4y^{-1}$

95. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

96. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2}$

97. $\left(\frac{5}{4}\right)^{-3}$

98. $\left(\frac{3}{5}\right)^{-3}$

99. $\left(\frac{x^2}{y}\right)^{-2}$

100. $\left(\frac{c^4}{d^2}\right)^{-2}$

101. $-\left(\frac{r^4}{s}\right)^{-4}$

102. $-\left(\frac{m^3}{n^4}\right)^{-5}$

103. $7a^{-3}b^{-4}$

104. $(3x^2y^3)^{-2}$

105. $(x^5y^{-3})^{-3}$

106. $2w(3w^{-5})$

107. $(4y^{-2})(5y^{-3})$

108. $2x^5(3x^{-6})$

109. $4x^4(-2x^{-4})$

110. $(9x^5)(-3x^{-7})$

111. $(4x^2y)(3x^3y^{-1})$

112. $(2x^{-3}y^{-2})(x^4y^0)$

113. $(5y^2)(4y^{-3}z^5)$

114. $(3y^{-2})(5x^{-1}y^3)$

115. $\frac{12c^9}{4c^4}$

116. $\frac{8z^{-4}}{32z^{-2}}$

117. $\frac{36x^{-4}}{9x^{-2}}$

118. $\frac{12x^{-2}y^0}{2x^3y^2}$

119. $\frac{3x^4y^{-2}}{6y^3}$

120. $\frac{16x^{-7}y^{-2}}{4x^5y^2}$

121. $\frac{32x^4y^{-2}}{4x^{-2}y^0}$

122. $\frac{21x^{-3}z^2}{7xz^{-3}}$

123. $\left(\frac{2x^2y^{-3}}{z}\right)^{-4}$

124. $\left(\frac{b^4c^{-2}}{2d^{-3}}\right)^{-1}$

125. $\left(\frac{2r^{-5}s^9}{t^{12}}\right)^{-4}$

126. $\left(\frac{5m^{-1}n^{-3}}{p^2}\right)^{-3}$

127. $\left(\frac{x^3y^{-4}z}{y^{-2}}\right)^{-6}$

128. $\left(\frac{3p^{-1}q^{-2}r^3}{p^2}\right)^3$

129. $\left(\frac{a^2b^{-2}}{3a^4}\right)^3$

130. $\left(\frac{x^{12}y^5}{y^{-3}z}\right)^{-4}$

Solución de problemas

131. a) ¿Se cumple que $a^{-1}b^{-1} = \frac{1}{ab}$? Explique su respuesta. b) ¿Se cumple que $a^{-1} + b^{-1} = \frac{1}{a+b}$? Explique su respuesta.
132. a) ¿Se cumple que $\frac{x^{-1}y^2}{z} = \frac{y^2}{xz}$? Explique su respuesta. b) ¿Se cumple que $\frac{x^{-1} + y^2}{z} = \frac{y^2}{x+z}$? Explique su respuesta.

Evalúe lo siguiente.

133. $4^2 + 4^{-2}$

134. $3^2 + 3^{-2}$

135. $2^2 + 2^{-2}$

136. $6^{-3} + 6^3$

Evalúe lo siguiente.

137. $5^0 - 3^{-1}$

138. $4^{-1} - 3^{-1}$

139. $2 \cdot 4^{-1} + 4 \cdot 3^{-1}$

140. $2^{-3} - 2^3 \cdot 2^{-3}$

141. $2 \cdot 4^{-1} - 3^{-1}$

142. $2 \cdot 4^{-1} - 4 \cdot 3^{-1}$

143. $3 \cdot 5^0 - 5 \cdot 3^{-2}$

144. $7 \cdot 2^{-3} - 2 \cdot 4^{-1}$

Determine el número que, al colocarse en el área sombreada, hace que el enunciado sea verdadero.

145. $3^{\blacksquare} = \frac{1}{9}$

146. $\frac{1}{4^{\blacksquare}} = 16$

147. $\frac{1}{3^{\blacksquare}} = 9$

148. $4^{\blacksquare} = \frac{1}{16}$

Problemas de reto

En los ejercicios 149 a 151, determine el número (o números) que, al colocarse en el área (o áreas) sombreada, haga verdadero el enunciado.

149. $(x^{\blacksquare}y^3)^{-2} = \frac{x^4}{y^6}$

150. $(\blacksquare x^{\blacksquare}y^{-2})^3 = \frac{8}{x^9y^6}$

151. $(x^4y^{-3})^{\blacksquare} = \frac{y^9}{x^{12}}$

- 152.** Para cualquier número real diferente de cero a , si $a^{-1} = x$, defina las siguientes expresiones en términos de x .

a) $-a^{-1}$ b) $\frac{1}{a^{-1}}$

- 153.** Considere $(3^{-1} + 2^{-1})^0$. De acuerdo con la regla del exponente cero, se sabe que esto es igual a 1. Como grupo, de-



Actividad en grupo

Como grupo, estudien y respondan el ejercicio 154.

- 154.** Es frecuente que los problemas que involucran exponentes se resuelvan en más de una forma. Considere

$$\left(\frac{3x^2y^3}{x}\right)^{-2}$$

- a) Miembro 1 del grupo: simplifique esta expresión, comenzando con lo que está entre paréntesis.
b) Miembro 2 del grupo: simplifique esta expresión, empleando antes que nada la regla de la potencia expandida

terminen el error en el cálculo siguiente. Expliquen su respuesta.

$$\begin{aligned}(3^{-1} + 2^{-1})^0 &= (3^{-1})^0 + (2^{-1})^0 \\ &= 3^{-1(0)} + 2^{-1(0)} \\ &= 3^0 + 2^0 \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

- c) Miembro 3 del grupo: simplifique esta expresión, empleando en primer lugar de la regla del exponente negativo.
d) Comparen sus respuestas. Si no obtienen la misma, determinen por qué.
e) Como grupo, decidan con cuál método fue más fácil simplificar la expresión —a), b) o c).

Ejercicios de repaso acumulativo

- [2.6] 155. Veleo** Si un velero viaja 3 millas en 48 minutos, ¿cuánto viajará en 80 minutos (con todas las condiciones sin cambio)?



- [3.1] 156. Volumen** Encuentre el volumen de un cilindro recto cuyo radio mide 5 pulgadas y su altura es de 12 pulgadas.

- [3.3] 157. Enteros** El mayor de dos enteros es una unidad más que el triple del menor. Si la suma de los dos es 37, encuéntrelos.

- 158. Costo de un artículo** El costo de un artículo una vez que se incrementa 20% es de \$1.50. Encuentre el precio del artículo antes del incremento.

- 159. Enteros consecutivos** Calcule dos enteros consecutivos cuya suma sea 75.

4.3 NOTACIÓN CIENTÍFICA



- 1 Convertir números a notación científica y viceversa.
- 2 Reconocer números en notación científica con coeficiente 1.
- 3 Hacer cálculos con notación científica.

1 Convertir números a notación científica y viceversa

Es frecuente ver, y a veces utilizar, números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, en enero de 2001, la población del mundo era cerca de 6,160,000,000 de personas. Tal vez se haya leído que el virus de la influenza mide 0.0000001 metros de diámetro. Debido a que es difícil trabajar con tantos ceros, expresamos tales nú-

meros por medio de exponentes. Por ejemplo, el número 6,160,000,000 lo escribimos como 6.16×10^9 , y el número 0.0000001 como 1.0×10^{-7} .

Los números como 6.16×10^9 y 1.0×10^{-7} están en una forma conocida como **notación científica**. Escribimos cada número en notación científica como un mayor o igual a 1 y menor que 10 ($1 \leq a < 10$), multiplicado por alguna potencia de 10. El exponente del 10 debe ser un entero.

Ejemplos de números en notación científica

$$\begin{aligned} 1.2 \times 10^6 \\ 3.762 \times 10^3 \\ 8.07 \times 10^{-2} \\ 1 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

A continuación cambiamos el número 68,400 a notación científica.

$$\begin{aligned} 68,400 &= 6.84 \times 10,000 \\ &= 6.84 \times 10^4 \quad \text{Observe que } 10,000 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4. \end{aligned}$$

Por tanto, $68,400 = 6.84 \times 10^4$. Para pasar de 68,400 a 6.84, el punto decimal se recorrió cuatro lugares a la izquierda. Observe que el exponente del 10, que es 4, es el mismo número de lugares que se recorre el punto decimal hacia la izquierda.

A continuación mostramos el procedimiento simplificado para escribir un número en notación científica.

Para escribir un número en notación científica

1. Recorrer el punto decimal del número original a la derecha del primer dígito diferente de cero. Esto dará un número mayor o igual a 1 y menor que 10.
2. Contar el número de lugares que recorrimos el punto decimal para obtener el número en el paso 1. Si el número original era 10 o mayor, consideramos la cuenta como positiva. Si el número original era menor que 1, consideramos la cuenta como negativa.
3. Multiplique el número que obtuvimos en el paso 1 por 10 elevado a la cuenta (exponente) que se obtuvo en el paso 2.

EJEMPLO 1 Escriba los números siguientes en notación científica.

- a)** 10,700 **b)** 0.000386 **c)** 972,000 **d)** 0.0083

Solución **a)** El número original es mayor que 10; por tanto, el exponente es positivo. Encontramos el punto decimal de 10,700 después del último cero.

$$10,700. = 1.07 \times 10^4$$



b) El número original es menor que 1; por tanto, el exponente es negativo.

$$0.000386 = 3.86 \times 10^{-4}$$



**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 17**

- c)** $972,000. = 9.72 \times 10^5$ **d)** $0.0083 = 8.3 \times 10^{-3}$
-  

Al escribir un número en notación científica, podemos dejar la respuesta con exponente negativo, como en los ejemplos **1b)** y **1d)**.



A continuación explicamos cómo escribir un número que esté en notación científica, como número sin exponentes o en forma decimal.

Para convertir un número de notación científica a forma decimal

1. Observar el exponente de la potencia de 10.
2. a) Si el exponente es positivo, el punto decimal del número (mayor o igual que 1 y menor que 10) se recorre a la derecha el mismo número de lugares que el exponente. Quizá sea necesario agregar ceros al número. Esto dará como resultado un número mayor o igual que 10.
b) Si el exponente es 0, el punto decimal no se mueve. Se elimina el factor 10^0 porque es igual a 1. Esto dará como resultado un número mayor o igual a 1 pero menor que 10.
c) Si el exponente es negativo, el punto decimal del número se mueve a la izquierda el mismo número de lugares que el exponente (sin contar el signo negativo). Tal vez sea necesario agregar ceros. Esto dará como resultado un número menor que 1.

EJEMPLO 2 Escriba cada número sin exponentes.

a) 2.9×10^4 b) 6.28×10^{-3} c) 7.95×10^8

Solución a) Recorremos el punto decimal cuatro lugares a la derecha.

$$2.9 \times 10^4 = 2.9 \times 10,000 = 29,000$$

b) Recorremos el punto decimal tres lugares hacia la izquierda.

$$6.28 \times 10^{-3} = 0.00628$$

c) Recorremos el punto decimal ocho lugares hacia la derecha.

$$7.95 \times 10^8 = 795,000,000$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 39



2 Reconocer números en notación científica con coeficiente 1

Frecuentemente escuchamos términos como kilogramos, miligramos y gigabytes. Por ejemplo, un frasco de tabletas de aspirinas tal vez indica que cada pastilla contiene 325 miligramos de aspirina. El disco duro de su computadora tiene, quizá, 40 gigabytes de memoria. Los prefijos kilo, mili y giga, son algunos de los que empleamos en el *sistema métrico*. Éste se utiliza como el sistema principal de medición en todas las naciones occidentales, excepto en los Estados Unidos. Siempre los empleamos con algún tipo de unidad base. Éstas pueden ser, por ejemplo, el metro, m (unidad de longitud); gramo, g (unidad de masa); litro, ℓ (unidad de volumen); bits, b (unidad de memoria de una computadora); o hertzios, Hz (medida de frecuencia). Por ejemplo, un *milímetro* es $\frac{1}{1000}$ metros. Un *megagramo* es 1,000,000 gramos, y así sucesivamente. La siguiente tabla ilustra el significado de algunos prefijos.*

*Existen otros prefijos que no se mencionan en la tabla. Por ejemplo, centi es 10^{-2} o 0.01 por la unidad base.

Prefijo	Significado	Símbolo	Significado como número decimal
nano	10^{-9}	n	$\frac{1}{1,000,000,000}$ o 0.000000001
micro	10^{-6}	μ	$\frac{1}{1,000,000}$ o 0.000001
mili	10^{-3}	m	$\frac{1}{1000}$ o 0.001
unidad base*	10^0		1
kilo	10^3	k	1000
mega	10^6	M	1,000,000
giga	10^9	G	1,000,000,000

* La unidad base no es un prefijo. Se incluye este renglón para introducir 10^0 en la tabla.

En ocasiones veremos números escritos como potencias de 10, pero sin un coeficiente numérico, como en la tabla anterior. Si no se indica el coeficiente numérico, éste siempre es igual a 1. Así, por ejemplo, $10^{-3} = 1.0 \times 10^{-3}$, y $10^9 = 1.0 \times 10^9$. Un disco duro de computadora que contenga 40 gigabytes (40 Gb) contiene $40(1.0 \times 10^9) = 40 \times 10^9 = 40,000,000,000$ bytes. Cincuenta micras ($50 \mu\text{m}$) es $50(1.0 \times 10^{-6}) = 50 \times 10^{-6} = 0.00005$ metros. Trescientos veinticinco miligramos (325 mg) es $325(1 \times 10^{-3}) = 325 \times 10^{-3} = 0.325$ gramos. Observe que en la tabla cada prefijo representa un valor 10^3 o 1000 veces mayor que el prefijo anterior a él. Por ejemplo, una micra es 10^3 o 1000 veces mayor que un nanómetro. Un gigámetro es 1000 veces mayor que un megámetro, y así sucesivamente.

En la figura 4.1 observamos que las frecuencias de radio FM y VHFTV son de alrededor de 10^8 hertzios (o ciclos por segundo). Así, la frecuencia de radio FM es $10^8 = 1.0 \times 10^8 = 100,000,000$ hertzios. Este número, cien millones de hertzios, también lo expresamos como 100×10^6 , o 100 megahertzios, 100 MHz.

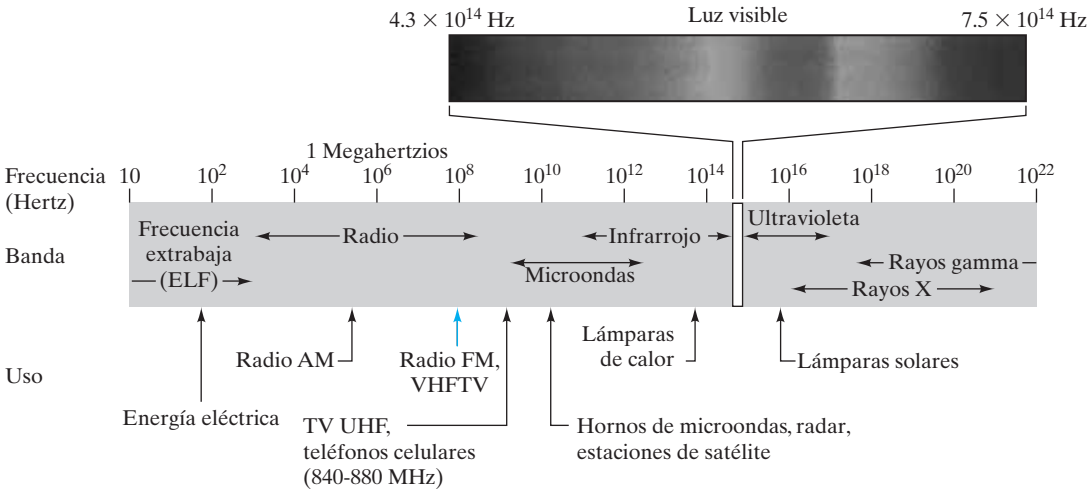


FIGURA 4.1

Ahora que ya sabemos interpretar potencias de 10 sin coeficientes numéricos, resolveremos algunos problemas empleando la notación científica.

EJEMPLO 3 Escriba cada cantidad sin el prefijo métrico.**a)** 52 kilogramos**b)** 183 nanosegundos**Solución****a)** 52 kilogramos (52 kg) = 52×10^3 gramos = 52,000 gramosAHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 45**b)** 183 nanosegundos (183 ns) = 183×10^{-9} segundos = 0.000000183 segundos**SUGERENCIA****CONSEJO PARA ESTUDIAR**

Pensemos en la frecuencia con que cotidianamente nos enfrentamos a cantidades grandes y pequeñas que podrían expresarse por medio de notación científica. Esto nos dará más de una idea para la notación científica.

3 Hacer cálculos con notación científica

Al trabajar con números escritos en notación científica utilizamos las reglas de los exponentes que presentamos en las secciones 4.1 y 4.2.

EJEMPLO 4 Multiplicar $(4.2 \times 10^6)(2 \times 10^{-4})$. Escriba la respuesta en forma decimal.**Solución**

De acuerdo con las propiedades conmutativa y asociativa de la multiplicación, reacomodamos la expresión como sigue.

$$\begin{aligned}
 (4.2 \times 10^6)(2 \times 10^{-4}) &= (4.2 \times 2)(10^6 \times 10^{-4}) \\
 &= 8.4 \times 10^{6+(-4)} \\
 &= 8.4 \times 10^2 \\
 &= 840
 \end{aligned}$$

*Por la regla del producto.**Notación científica.**Forma decimal.*AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 55**EJEMPLO 5** Divida $\frac{3.2 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-3}}$. Escriba la respuesta en notación científica.**Solución**

$$\begin{aligned}
 \frac{3.2 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-3}} &= \left(\frac{3.2}{5}\right)\left(\frac{10^{-6}}{10^{-3}}\right) \\
 &= 0.64 \times 10^{-6-(-3)} \\
 &= 0.64 \times 10^{-6+3} \\
 &= 0.64 \times 10^{-3} \\
 &= 6.4 \times 10^{-4}
 \end{aligned}$$

*Por la regla del cociente.**Notación científica.*AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 61

La respuesta al ejemplo 5 en forma decimal sería 0.00064.

**Uso de la calculadora**

¿Qué es lo que muestra la calculadora cuando se multiplican números muy grandes o muy pequeños?

La respuesta depende de si la máquina tiene capacidad para mostrar una respuesta en notación científica. En aquellas sin esta característica, es probable que aparezca un mensaje de error debido a que la respuesta sería demasiado grande o demasiado pequeña para la pantalla. Por ejemplo, en una calculadora sin notación científica, veríamos lo siguiente:

8000000 600000

(Continúa en la página siguiente)

En calculadoras científicas y graficadoras veríamos la respuesta del ejemplo anterior de las posibles maneras siguientes.

Resultados posibles

$$\begin{array}{l} 8000000 \times 600000 = 4.8 \quad 12 \\ 8000000 \times 600000 = 4.8 \quad 12 \\ 8000000 \times 600000 = 4.8E12 \end{array}$$

Cada respuesta significa 4.8×10^{12} . Veremos un ejemplo más.

Resultados posibles

$$\begin{array}{l} 0.0000003 \times 0.004 = 1.2 \quad -9 \\ 0.0000003 \times 0.004 = 1.2 \quad -9 \\ 0.0000003 \times 0.004 = 1.2E-9 \end{array}$$

Cada respuesta significa 1.2×10^{-9} . En ciertas calculadoras hay que oprimir la tecla **ENTER** en lugar de la **=**. La calculadora graficadora TI-83 Plus muestra las respuestas con el uso de E; por ejemplo, 4.8E12.

EJEMPLO 6 Comparación de barcos grandes El desplazamiento bruto del crucero *Disney Magic* es alrededor de 8.5×10^4 ton. El del *Destiny* de la línea Carnival, es cerca de 1.02×10^5 ton.

- a) ¿Cuánto más grande es el desplazamiento bruto del *Destiny* que el del *Disney Magic*?
- b) ¿Cuántas veces más grande es el desplazamiento bruto del *Destiny* que el del *Disney Magic*?



Solución a) **Entender** Necesitamos restar 8.5×10^4 de 1.02×10^5 . Para sumar o restar números en notación científica, por lo general hacemos que los exponentes sean los mismos.

Traducir Escribimos 1.02×10^5 como 10.2×10^4 . Ahora se resta como sigue.

Calcular

$$\begin{array}{r} 10.2 \times 10^4 \\ - 8.5 \times 10^4 \\ \hline 1.7 \times 10^4 \end{array}$$

Observe que en la resta, no restamos los 10^4 . Esta sustracción también la podemos efectuar así: $(10.2 \times 10^4) - (8.5 \times 10^4) = (10.2 - 8.5) \times 10^4 = 1.7 \times 10^4$

Comprobar Comprobamos escribiendo los números en forma decimal.

$$\begin{array}{r} 102,000 \\ - 85,000 \\ \hline 17,000 \text{ o bien } 1.7 \times 10^4 \end{array}$$

Respuesta Como obtenemos los mismos resultados, la diferencia es 1.7×10^4 (o bien, 17,000) ton.

b) Entender El inciso **b)** parece similar al **a)**, pero planteamos una pregunta diferente porque pedimos hallar el *número de veces* mayor que es, en lugar que *cuánto más grande es*. Para esto realizamos una división.

Traducir Dividir el desplazamiento bruto del *Destiny* entre el del *Disney Magic*.

Calcular

$$\begin{aligned} \frac{1.02 \times 10^5}{8.5 \times 10^4} &= \frac{1.02}{8.5} \times \frac{10^5}{10^4} \\ &= 0.12 \times 10^{5-4} && \text{Regla del cociente para los exponentes.} \\ &= 0.12 \times 10^1 \\ &= 1.2 \end{aligned}$$

Comprobar Revisa con la escritura de los números en forma decimal.

$$\frac{102,000}{85,000} = 1.2$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 75

Respuesta Como obtenemos el mismo resultado, el desplazamiento del *Destiny* es 1.2 veces mayor que el del *Disney Magic*. 

EJEMPLO 7

Computadora más rápida En enero de 2002, la computadora más rápida del mundo, llamada *ASCI White*, ubicada en el Lawrence Livermore National Laboratory, en California, era capaz de realizar un solo cálculo simple en 0.000000000000083 segundos (83 mil billonésimas de segundo). ¿Cuánto tiempo tomaría a esta computadora hacer 7 mil millones (7,000,000,000) de cálculos?

Solución

Entender la computadora hace un cálculo en 1(0.000000000000083) segundos. 2 cálculos en 2(0.000000000000083) segundos, 3 cálculos en 3(0.000000000000083) segundos, y 7 mil millones de operaciones en 7,000,000,000(0.000000000000083) segundos.



La *ASCI White* cubre un área del tamaño de dos canchas de basquetbol

Traducir Multiplicaremos con la conversión de cada número en notación científica.

$$\begin{aligned}
 7,000,000,000(0.0000000000000083) &= (7 \times 10^9)(8.3 \times 10^{-14}) \\
 &= (7 \times 8.3)(10^9 \times 10^{-14}) \\
 &= 58.1 \times 10^{-5} \\
 &= 0.000581
 \end{aligned}$$

Calcular

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 79 **Respuesta** A la *ASCI White* le tomaría 0.000581 segundos para realizar 7 mil millones de cálculos. 

Matemáticas en acción

El aire que respiramos

La Agencia de Protección Ambiental (EPA, por sus siglas en inglés) ha identificado la calidad del aire de los interiores como la preocupación sanitaria número uno del presente. Lo que provoca que la calidad del aire de los interiores sea baja, es, con mucho, la mala calidad del aire del exterior, en particular en las áreas urbanas. Contaminantes como polvo, polen y de origen automotriz, con frecuencia encuentran un camino hacia el interior de los edificios. Con más y más productos químicos en uso, la gente sufre cada vez más de hipersensibilidad química a los formaldehídos, pesticidas, ozono, solventes para limpieza, fibra de vidrio, asbestos, plomo y radón. Las alergias a los plásticos hoy están más difundidas que nunca. Ningún edificio o sitio de trabajo está a salvo.



Para los sitios de trabajo relacionados con farmacéuticos y biotecnología, el asunto del aire libre de contaminantes es aún más crucial. Un tipo de filtro que utilizamos en esta clase de instalaciones es el HEPA (High Efficiency Particulate Air), que fue desarrollado originalmente para retirar contaminantes radiactivos del aire durante el desarrollo de la primera bomba atómica.

La ciencia de la filtración involucra la captura de objetos que van desde el polvo de carbón a los virus. Es común expresar el tamaño de las partículas que filtramos en micras, donde 1 micra (abreviatura de 1 micrómetro) = 1 millonésima de metro = 10^{-6} metros = 0.000001 metros. La medición indica el diámetro de la partícula.

A continuación presentamos una lista de los tipos de partículas para los que hemos desarrollado sistemas de filtración; los rangos de su diámetro se dan en micras y en metros.

	Micras	Metros
Polen	10–100	10^{-5} – 10^{-4}
Humo de cigarro	0.01–1	10^{-8} – 10^{-6}
Talco, mineral	0.4–80	4×10^{-7} – 8×10^{-5}
Polvo dañino para los pulmones	0.8–6	8×10^{-7} – 6×10^{-6}
Bacteria	0.5–50	5×10^{-7} – 5×10^{-5}
Virus	0.002–0.08	2×10^{-9} – 8×10^{-8}

Conjunto de ejercicios 4.3

Ejercicios conceptuales

1. Describa la forma de un número dado en notación científica.
2. **a)** Describa con sus propias palabras cómo escribimos un número igual o mayor que 10, en notación científica.
b) Con el uso del procedimiento descrito en el inciso **a)**, escriba 42,100 en notación científica.
3. **a)** Con sus propias palabras, describa cómo escribimos un número menor que 1 en notación científica.
b) Por medio del procedimiento descrito en el inciso **a)**, escriba 0.00568 en notación científica.
4. ¿Cuántos lugares y en qué dirección hay que mover el punto decimal cuando convertimos un número de notación

- científica a forma decimal, si el exponente sobre la base 10 es igual a 4?
5. ¿Cuántos lugares y en qué dirección hay que recorrer el punto decimal cuando convertimos un número de notación científica a forma decimal, si el exponente sobre la base es -5 ?
6. Al cambiar un número a notación científica, ¿en qué condiciones será positivo el exponente sobre la base 10?
7. Al cambiar un número a notación científica, ¿en qué condiciones será negativo el exponente sobre la base 10?
8. Al escribir el número 92,129 en notación científica, ¿el exponente sobre la base 10 será positivo o negativo? Explique.
9. Al escribir el número 0.00734 en notación científica, ¿el exponente sobre la base 10 será positivo o negativo? Explique.
10. Escriba el número 1,000,000 en notación científica.
11. Escriba el número 0.000001 en notación científica.
12. a) 82.39×10^4 , ¿está escrito en notación científica? Si no lo estuviera, ¿cómo debería escribirse?
b) 0.083×10^{-5} , ¿está escrito en notación científica? Si no lo está, ¿cómo debería escribirse?

Práctica de habilidades

Expresa cada número en notación científica.

- | | | | |
|----------------|---------------|----------------|-------------------|
| 13. 350,000 | 14. 3,610,000 | 15. 450 | 16. 0.00062 |
| 17. 0.053 | 18. 0.000726 | 19. 19,000 | 20. 5,260,000,000 |
| 21. 0.00000186 | 22. 0.0075 | 23. 0.00000914 | 24. 74,100 |
| 25. 220,300 | 26. 0.02 | 27. 0.005104 | 28. 416,000 |

Expresa cada número en forma decimal (sin exponentes).

- | | | | |
|----------------------------|---------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 29. 4.3×10^4 | 30. 1.63×10^{-4} | 31. 5.43×10^{-3} | 32. 6.15×10^5 |
| 33. 2.13×10^{-5} | 34. 7.26×10^{-6} | 35. 6.25×10^5 | 36. 4.6×10^1 |
| 37. 9×10^6 | 38. 6.475×10^1 | 39. 5.35×10^2 | 40. 3.14×10^{-2} |
| 41. 6.201×10^{-4} | 42. 7.73×10^{-7} | 43. 1×10^4 | 44. 7.13×10^{-4} |

En los ejercicios 45 a 52, escriba la cantidad sin prefijos métricos. Consulte el ejemplo 3.

- | | | |
|----------------------|---------------------|-----------------------|
| 45. 8 micras | 46. 23.5 milímetros | 47. 125 gigawatts |
| 48. 8.7 nanosegundos | 49. 15.3 kilómetros | 50. 80.2 megahertzios |
| 51. 15 microgramos | 52. 3.12 miligramos | |

Ejecute cada operación y exprese cada número en forma decimal (sin exponentes).

- | | | |
|--|--|---|
| 53. $(2 \times 10^2)(3 \times 10^5)$ | 54. $(2 \times 10^{-3})(3 \times 10^2)$ | 55. $(2.7 \times 10^{-6})(9 \times 10^4)$ |
| 56. $(1.6 \times 10^{-2})(4 \times 10^{-3})$ | 57. $(1.3 \times 10^{-8})(1.74 \times 10^6)$ | 58. $(4 \times 10^5)(1.2 \times 10^{-4})$ |
| 59. $\frac{8.4 \times 10^6}{2 \times 10^3}$ | 60. $\frac{6 \times 10^{-3}}{3 \times 10^1}$ | 61. $\frac{7.5 \times 10^6}{3 \times 10^3}$ |
| 62. $\frac{14 \times 10^6}{4 \times 10^8}$ | 63. $\frac{4 \times 10^2}{8 \times 10^5}$ | 64. $\frac{16 \times 10^3}{8 \times 10^{-3}}$ |

Realice cada una de las operaciones que se indican; primero convierta cada número a notación científica. Escriba la respuesta en notación científica.

- | | | |
|--|---|---------------------------|
| 65. $(700,000)(6,000,000)$ | 66. $(0.003)(0.00015)$ | 67. $(0.0004)(320)$ |
| 68. $(67,000)(200,000)$ | 69. $\frac{2,100,000}{7000}$ | 70. $\frac{0.00004}{200}$ |
| 71. $\frac{0.00035}{0.000002}$ | 72. $\frac{150,000}{0.0005}$ | |
| 73. Enliste los siguientes números del menor al mayor:
$4.8 \times 10^5, 3.2 \times 10^{-1}, 4.6, 8.3 \times 10^{-4}$. | 74. Enliste los siguientes números, del menor al mayor:
$7.3 \times 10^2, 3.3 \times 10^{-4}, 1.75 \times 10^6, 5.3$. | |

Solución de problemas

En los ejercicios 75 a 92, escriba la respuesta en forma decimal (sin exponentes) a menos que se pida otra cosa.

- 75. Población** En 2002, la población de E.U. era de alrededor de 2.81×10^8 personas, y la del mundo era de 6.20×10^9 personas.

- ¿Cuántas personas vivían fuera de los Estados Unidos en 2002?
- ¿Cuántas veces es mayor la población mundial que la de E.U.?

- 76. Películas** A continuación presentamos una lista de las ventas brutas de boletos de las cinco películas más vistas en los Estados Unidos al 1 de enero de 2002.

Película	Año de estreno	Ventas brutas de boletos aproximadas en E.U.
1. <i>Titanic</i>	1997	\$601,000,000
2. <i>La Guerra de las Galaxias</i>	1977	\$461,000,000
3. <i>La Guerra de las Galaxias-La Amenaza Fantasma</i>	2001	\$431,000,000
4. <i>E.T.</i>	1982	\$400,000,000
5. <i>Parque Jurásico</i>	1993	\$357,000,000

- ¿Qué tanto más grande fueron las ventas brutas de boletos para ver *Titanic* que para *Parque Jurásico*? Responda en notación científica.
- ¿Cuántas veces mayor fueron las ventas brutas de boletos de *Titanic* que las de *Parque Jurásico*?

- 77. Cataratas del Niágara** Un tratado entre los Estados Unidos y Canadá requiere que durante la temporada turística, por las cataratas del Niágara fluya un mínimo de 100,000 pies cúbicos de agua por segundo (otros 130,000 a 160,000 pies cúbicos/seg son desviados para generar energía). Encuentre el volumen mínimo de agua que fluirá por ellas en un periodo de 24 horas durante la temporada turística.



- 78. Big Mac** El martes 20 de noviembre de 2001, muchos periódicos publicaron un artículo sobre Don Gorske respecto de su aparición en el libro *Guinness World Records*. Cada día de los últimos 29 años, Gorske había comido de una a tres Big Mac. Hasta ese momento, había comido 1.8×10^4 de esas hamburguesas. Las calorías en total que consumió por todas las Big Mac, eran alrededor de 1.06×10^7 .

Con la información dada, calcule el número de calorías que hay en una Big Mac.

- 79. Velocidad de una computadora** Si una computadora hace un cálculo en 0.000002 segundos, ¿cuánto tiempo, en segundos, tomará para realizar 8 billones ($8,000,000,000,000$) de cálculos? Escriba la respuesta en notación científica.

- 80. Galletas de la fortuna** ¿Quién escribe los papeles que vienen en esas galletas? Las galletas de la fortuna son un invento estadounidense. Steven Yang, quien opera la M & Y Trading Company, en San Francisco, imprime alrededor del 90% de los 1.02×10^9 papeles de la fortuna en las galletas de Estados Unidos en un año.

- ¿Cuántos papeles imprime Yang en un año?

- ¿Cuántos papeles imprime Yang en un día?

- 81. Pañales** Si se hiciera una fila de los 18 mil millones de pañales desechables que se tiran en Estados Unidos cada año, alcanzaría la Luna y regresaría 7 veces (siete viajes redondos).

- Escriba 18 mil millones en notación científica.

- Si la distancia de la Tierra a la Luna es de 2.38×10^5 millas, ¿cuál es la longitud de todos los pañales que se colocaron en fila? Escriba su respuesta en notación científica y como un número sin exponentes.

- 82. Encarcelamiento** Los gastos por los encarcelamientos en los Estados Unidos han aumentado de $\$6.9 \times 10^6$ en 1980, a cerca de $\$4.5 \times 10^7$ en 2002.

- ¿Qué tanto más grande fue la cantidad gastada en 2002 que la de 1980?

- ¿Cuántas veces mayor fue la cantidad gastada en 2002 que la de 1980?

(Fuente: *Fortune Magazine*)

- 83. Umpires versus árbitros** El salario de arranque en 2001 para un umpire de las ligas mayores fue de $\$1.05 \times 10^8$, mientras que el de un árbitro de la NFL fue de $\$2.23 \times 10^4$.

- ¿Qué tanto más grande fue el salario de arranque para un umpire que el de un árbitro?

- ¿Cuántas veces mayor fue el salario de arranque para un umpire que el de un árbitro?

(Fuente: *Money Magazine*)

- 84. Astronomía** A continuación se enlista la masa de la Tierra, la de la Luna y la de Júpiter.

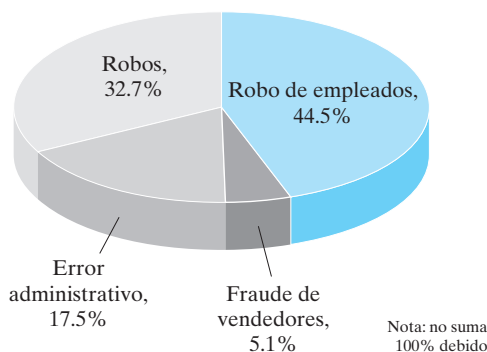
Tierra: $5,794,000,000,000,000,000,000$ toneladas métricas

Luna: $73,400,000,000,000,000,000$ toneladas métricas

Júpiter: $1,899,000,000,000,000,000,000,000$ toneladas métricas

- a) Escriba la masa de la Tierra, de la Luna y de Júpiter en notación científica.
- b) ¿Cuántas veces mayor es la masa de la Tierra que la de la Luna?
- c) ¿Cuántas veces mayor es la masa de Júpiter que la de la Tierra?
85. **Luz del Sol** El Sol está a 9.3×10^7 millas de la Tierra. La luz viaja a una velocidad de 1.86×10^5 millas por segundo. ¿Cuánto tiempo, tanto en minutos como en segundos, tardará la luz del Sol en llegar a la Tierra?
86. **Inventario perdido** La gráfica circular que se muestra a continuación, ilustra lo que pasó con el inventario perdido en el 2000. En este año, la pérdida total anual fue de \$29,000,000,000 (\$29 mil millones). ¿Cuánto inventario se perdió por robo? Escriba su respuesta en notación científica.

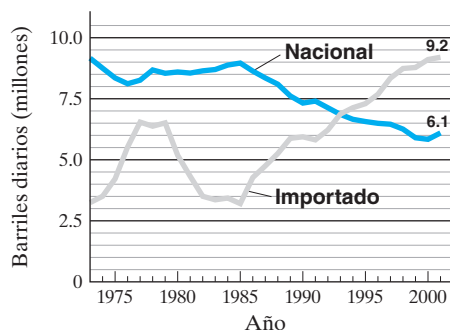
¿A dónde va el inventario perdido?



Fuente: 2000 National Retail Security Survey

87. **Crecimiento de la población** Tomó la historia humana para que la población del mundo alcanzara los 6.16×10^9 de personas en 2002. A las tasas actuales, la población mundial se duplicará en cerca de 54 años. Calcule la población del mundo en 2056. Escriba su respuesta en notación científica.
88. **Fuentes de petróleo** La siguiente gráfica de líneas (poligonal) muestra la cantidad de petróleo que se produce en Estados Unidos (nacional) y la que se importa en este país.

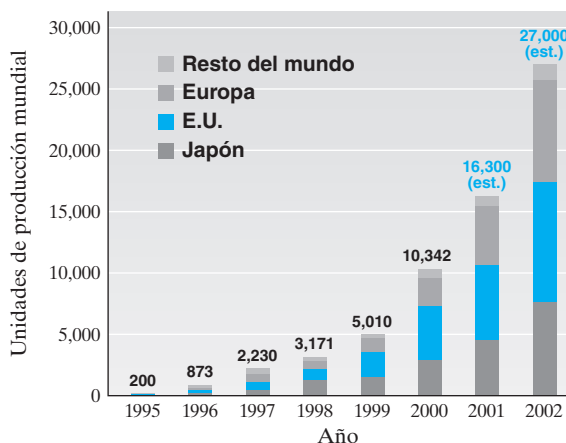
Flujo de petróleo en E.U.



Fuentes: Energy Information Administration; USGS, State of Alaska

- a) Escriba, con notación científica, el número de barriles de petróleo producidos en Estados Unidos en 2001, y el número de barriles importados en este país en el mismo año.
- b) Determine, con notación científica, la cantidad total de petróleo producido e importado por día en Estados Unidos, en 2001.
- c) Determine, con notación científica, la diferencia entre el número de barriles de petróleo crudo producido e importado por día en Estados Unidos, en 2001.
89. **Cámaras digitales** La siguiente gráfica muestra la producción mundial de cámaras digitales.

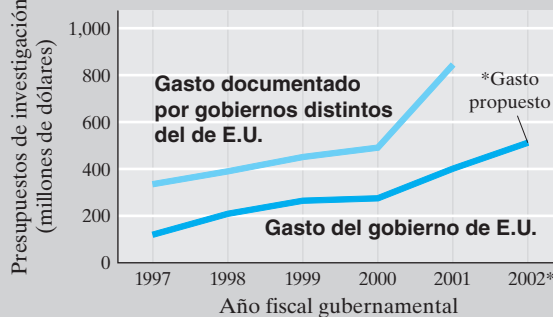
Las ventas de cámaras digitales se elevan



Fuente: Japan Camera Industrial Association + Olympus' Estimate

- a) Proporcione, en notación científica, la producción mundial de cámaras digitales en 2002.
- b) Olympus tuvo la mayor participación en las ventas de cámaras digitales en 2000. Si en el año 2000 esta compañía produjo el 22% de las cámaras digitales del mundo, ¿cuántas cámaras produjo? Escriba su respuesta sin exponentes.
90. **Nanotecnología** La siguiente gráfica muestra la cantidad gastada en nanotecnología, de 1997 a 2002.

Dólares corrientes de inversión para nanotecnología



Fuente: U.S. Senate briefing on nanotechnology, 24 de mayo de 2001, y National Science Foundation

- a) Escriba, con notación científica, estimaciones del número de dólares gastados por el gobierno de E.U. en nanotecnología, en 1997 y 2002. (Por ejemplo, escriba un número como $\$1.3 \times 10^8$.)
- b) Estime la diferencia, en dólares, gastados por el gobierno de E.U. en nanotecnología en 2002 y 1997.
- c) Estime con notación científica la cantidad total gastada en nanotecnología en 2001, incluidos tanto el gobierno de E.U. como otros gobiernos.
- d) Escriba sin exponentes la cantidad en dólares que determinada en el inciso c).
91. **Un número grande** El número de Avogadro, llamado así en honor del químico italiano del siglo XIX, Amadeo Avogadro, es aproximadamente 6.02×10^{23} , que representa el número de átomos que hay en 12 gramos de carbón puro.

Si este número se escribiera en forma decimal, ¿cuántos dígitos contendría?

¿Cuál es el número de átomos que hay en 1 gramo de carbón puro? Escriba la respuesta en notación científica.

92. **Estructura de la materia** En un artículo de *Scientific American* mencionan que los físicos han creado un *modelo estándar* que describe la estructura de la materia a 10^{-18} metros. Si este número se escribiera sin exponentes, ¿cuántos ceros habría a la derecha del punto decimal?

Problemas de reto

93. **La película Contacto** En la película *Contacto*, Jodie Foster interpreta a una astrónoma que hace la siguiente afirmación: “hay 400 mil millones de estrellas en el universo. Si sólo una de cada millón de éstas tuviera planetas, y si sólo uno de cada millón de éstos tuviera vida, y si sólo en uno por cada millón de éstos hubiera vida inteligente, habría, literalmente, millones de civilizaciones extraterrestres”. ¿Cree usted que esta afirmación es correcta? Explique su respuesta.



94. ¿Cuántas veces, más grande o más pequeño, es 10^{-12} metros que 10^{-18} metros?
95. ¿Cuántas veces más pequeño es 1 nanosegundo que un milisegundo?
96. **Año luz** La luz viaja a una velocidad de 1.86×10^5 millas por segundo. Un *año luz* es la distancia que la luz recorre en un año. Determine el número de millas que hay en un año luz.



Actividad en grupo

Como grupo, estudien y resuelvan el ejercicio 97.

97. **Un millón versus mil millones** ¿Tiene idea de la diferencia que hay entre un millón (1,000,000), mil millones (1,000,000,000) y un billón (1,000,000,000,000)?
- a) Escriba un millón, mil millones y un billón, en notación científica.
- b) Miembro 1 del grupo: determine cuánto tiempo tomaría agotar un millón de dólares si se gastara \$1,000 diarios.

- c) Miembro 2 del grupo: repita el inciso b) para mil millones de dólares.
- d) Miembro 3 del grupo: repita el inciso b) para un billón de dólares.
- e) Como grupo, determinen cuántas veces es mayor mil millones de dólares que un millón de dólares.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 98. Evalúe $4x^2 + 3x + \frac{x}{2}$ cuando $x = 0$.

[2.3] 99. a) Si $-x = -\frac{3}{2}$, ¿cuál es el valor de x ?

b) Si $5x = 0$, ¿cuál es el valor de x ?

[2.5] 100. Resuelva la ecuación $2x - 3(x - 2) = x + 2$.

[4.1] 101. Simplifique la expresión $\left(\frac{-2x^5y^7}{8x^8y^3}\right)^3$.

4.4
SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS



- 1 Identificar polinomios.
- 2 Sumar polinomios.
- 3 Restar polinomios.
- 4 Restar polinomios en columnas.

1
Identificar polinomios

Un **polinomio en x** es una expresión que contiene la suma de un número finito de términos de la forma ax^n , para cualquier número real a y cualquier *número entero positivo* n .

Ejemplos de polinomios

$$2x$$

$$\frac{1}{3}x - 4$$

$$x^2 - 2x + 1$$

No son polinomios

$$4x^{1/2} \quad (\text{Exponente fraccionario.})$$

$$3x^2 + 4x^{-1} + 5 \quad (\text{Exponente negativo.})$$

$$4 + \frac{1}{x} \quad \left(\frac{1}{x} = x^{-1}, \text{exponente negativo.}\right)$$

Escribimos un polinomio en **orden descendente** (o en **potencias descendentes**) de **la variable**, con los exponentes de ésta en disminución de izquierda a derecha.

Ejemplo de polinomio en orden descendente

$$2x^4 + 4x^2 - 6x + 3$$

Observe en este ejemplo que el término constante, 3, está al final porque podemos escribirlo como $3x^0$. Recuerde que $x^0 = 1$.

Un polinomio puede tener más de una variable. Por ejemplo, $3xy + 2$ es un polinomio con dos variables, x y y .

Un polinomio con un término se denomina **monomio**; con dos términos, **binomio**; y con tres términos, **trinomio**. Los polinomios que contienen más de tres términos no tienen nombres especiales. El prefijo “poli” significa “muchos”. La siguiente tabla resume esta información.

Tipo de polinomio	Número de términos	Ejemplos
Monomio	Uno	8, $4x$, $-6x^2$
Binomio	Dos	$x + 5$, $x^2 - 6$, $4y^2 - 5y$
Trinomio	Tres	$x^2 - 2x + 3$, $3z^2 - 6z + 7$

El **grado de un término** de un polinomio con una variable es el exponente que tiene la variable en dicho término.

Término	Grado del término	
$4x^2$	Segundo	
$2y^5$	Quinto	
$-5x$	Primero	<i>($-5x$ puede escribirse como $-5x^1$.)</i>
3	Cero	<i>(es posible escribir 3 como $3x^0$.)</i>

Para un polinomio con dos o más variables, el grado de un término es la suma de los exponentes de las variables. Por ejemplo, el grado del término $4x^2y^3$ es 5 porque $2 + 3 = 5$. El grado del término $5a^4bc^3$ es 8 porque $4 + 1 + 3 = 8$.

El **grado de un polinomio** es el mismo que el de su término de grado mayor.

Polinomio	Grado del polinomio	
$8x^3 + 2x^2 - 3x + 4$	Tercero	($8x^3$ es el término de mayor grado.)
$x^2 - 4$	Segundo	(x^2 es el término de mayor grado.)
$2x - 1$	Primero	($2x$ o $2x^1$ es el término de mayor grado.)
4	Cero	(4 o $4x^0$ es el término de mayor grado.)
$x^2y^4 + 2x + 3$	Sexto	(x^2y^4 es el término de mayor grado.)

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 53

2 Sumar polinomios

En la sección 2.1 dijimos que los términos semejantes son los que tienen las mismas variables y los mismos exponentes. Es decir, los términos semejantes sólo difieren en sus coeficientes numéricos.

Ejemplos de términos semejantes

3,	-5
$2x$,	x
$-2x^2$,	$4x^2$
$3y^2$,	$5y^2$
$3xy^2$,	$5xy^2$

Suma de polinomios

Para sumar polinomios, reducimos los términos semejantes de los polinomios.

EJEMPLO 1 Simplificar $(4x^2 + 6x + 3) + (2x^2 + 5x - 1)$.

Solución Recuerde que $(4x^2 + 6x + 3) = 1(4x^2 + 6x + 3)$ y que $(2x^2 + 5x - 1) = 1(2x^2 + 5x - 1)$. Utilizamos la propiedad distributiva para eliminar los paréntesis, como observamos a continuación.

$$\begin{aligned}
 & (4x^2 + 6x + 3) + (2x^2 + 5x - 1) \\
 &= 1(4x^2 + 6x + 3) + 1(2x^2 + 5x - 1) \\
 &= 4x^2 + 6x + 3 + 2x^2 + 5x - 1 && \text{Utilizar la propiedad distributiva.} \\
 &= \underbrace{4x^2 + 2x^2}_{6x^2} + \underbrace{6x + 5x}_{11x} + \underbrace{3 - 1}_2 && \text{Reacomodar los términos.} \\
 &= 6x^2 + 11x + 2 && \text{Reducir términos semejantes.} \quad \star
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 67

En los siguientes ejemplos no mostraremos la multiplicación por 1, como sí se hizo en el ejemplo 1.

EJEMPLO 2 Simplificar $(5a^2 + 3a + b) + (a^2 - 7a + 3)$.

$$\begin{aligned}
 & (5a^2 + 3a + b) + (a^2 - 7a + 3) \\
 &= 5a^2 + 3a + b + a^2 - 7a + 3 && \text{Eliminar paréntesis.} \\
 &= \underbrace{5a^2 + a^2}_{6a^2} + \underbrace{3a - 7a}_{-4a} + b + 3 && \text{Reacomodar términos.} \\
 &= 6a^2 - 4a + b + 3 && \text{Reducir términos semejantes.} \quad \star
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Simplificar $(3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 3y)$.**Solución**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 77

$$\begin{aligned}
 & (3x^2y - 4xy + y) + (x^2y + 2xy + 3y) \\
 &= 3x^2y - 4xy + y + x^2y + 2xy + 3y && \text{Eliminar paréntesis.} \\
 &= \underbrace{3x^2y + x^2y} - \underbrace{4xy + 2xy} + \underbrace{y + 3y} && \text{Reacomodar términos.} \\
 &= 4x^2y - 2xy + 4y && \text{Reducir términos semejantes.} \quad \star
 \end{aligned}$$

Por lo general, cuando sumemos polinomios haremos como en los ejemplos 1 a 3. Es decir, en primer lugar arreglamos el polinomio en forma horizontal. Sin embargo, en la sección 4.6, en la división de polinomios, habrá pasos en los que los sumemos en columnas.

Para sumar polinomios en columnas

1. Arreglar los polinomios en orden descendente, uno bajo el otro con los términos semejantes en las mismas columnas.
2. Sumar los términos de cada columna.

EJEMPLO 4 Sumar $6x^2 - 2x + 2$ y $-2x^2 - x + 7$ con el uso de columnas.**Solución**

$$\begin{array}{r}
 6x^2 - 2x + 2 \\
 -2x^2 - x + 7 \\
 \hline
 4x^2 - 3x + 9
 \end{array}$$

**EJEMPLO 5** Sumar $(5w^3 + 2w - 4)$ y $(2w^2 - 6w - 3)$ por medio de columnas.**Solución**

Como el polinomio $5w^3 + 2w - 4$ no tiene un término w^2 , sumaremos el término $0w^2$ al polinomio. Este procedimiento ayuda en la alineación de los términos semejantes.

$$\begin{array}{r}
 5w^3 + 0w^2 + 2w - 4 \\
 2w^2 - 6w - 3 \\
 \hline
 5w^3 + 2w^2 - 4w - 7
 \end{array}$$

**3 Restar polinomios**

Ahora aprenderá a restar polinomios.

Para restar polinomios

1. Usamos la propiedad distributiva para eliminar paréntesis. (Esto tendrá el efecto de cambiar el signo de *cada* término dentro de los paréntesis del polinomio que se resta.)
2. Reducir términos semejantes.

EJEMPLO 6 Simplificar $(3x^2 - 2x + 5) - (x^2 - 3x + 4)$.**Solución**

$(3x^2 - 2x + 5)$ significa $1(3x^2 - 2x + 5)$ y $(x^2 - 3x + 4)$ significa $1(x^2 - 3x + 4)$. Utilizamos esta información en la solución, como mostramos a continuación.

$$\begin{aligned}
 (3x^2 - 2x + 5) - (x^2 - 3x + 4) &= 1(3x^2 - 2x + 5) - 1(x^2 - 3x + 4) \\
 &= 3x^2 - 2x + 5 - x^2 + 3x - 4 && \text{Eliminar paréntesis.} \\
 &= \underbrace{3x^2 - x^2} - \underbrace{2x + 3x} + \underbrace{5 - 4} && \text{Reacomodar términos.} \\
 &= 2x^2 + x + 1 && \text{Reducir términos semejantes.} \quad \star
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 101

En la sección 2.1 vimos que cuando un signo negativo precede al paréntesis, al eliminar éste cambia el signo de cada término de adentro. Mostramos esto en el ejemplo 6. En el ejemplo 7 no mostraremos la multiplicación por -1 , como sí se hizo en el 6.

EJEMPLO 7 Restar $(-3x^2 - 5x + 3)$ de $(x^3 + 2x + 6)$.

Solución

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 107

$$\begin{aligned}
 & (x^3 + 2x + 6) - (-3x^2 - 5x + 3) \\
 &= x^3 + 2x + 6 + 3x^2 + 5x - 3 && \text{Eliminar paréntesis.} \\
 &= x^3 + 3x^2 + 2x + 5x + 6 - 3 && \text{Reacomodar términos.} \\
 &= x^3 + 3x^2 + 7x + 3 && \text{Reducir términos semejantes.}
 \end{aligned}$$



CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Uno de los errores más comunes ocurre al restar polinomios. Al restar un polinomio de otro, **debe cambiar el signo de cada término del polinomio sustraído, y no sólo el del primer término.**

CORRECTO

$$\begin{aligned}
 & 6x^2 - 4x + 3 - (2x^2 - 3x + 4) \\
 &= 6x^2 - 4x + 3 - 2x^2 + 3x - 4 \\
 &= 4x^2 - x - 1
 \end{aligned}$$

INCORRECTO

$$\begin{aligned}
 & \cancel{6x^2 - 4x + 3 - (2x^2 - 3x + 4)} \\
 &= \cancel{6x^2 - 4x + 3 - 2x^2 - 3x + 4} \\
 &= \cancel{4x^2 - 7x + 7}
 \end{aligned}$$

¡No cometa este error!

4 Restar polinomios en columnas

Podemos restar, o sumar, polinomios en columnas.

Para restar polinomios en columnas

1. Escriba *el polinomio que va a restar* debajo del polinomio del que se restará. Escriba los términos semejantes en la misma columna.
2. *Cambie el signo de cada término* en el polinomio que va a restar. (Si lo desea, puede realizar este paso mentalmente.)
3. Sumar los términos en cada columna.

EJEMPLO 8 Restar $(x^2 - 4x + 6)$ de $(4x^2 + 5x + 7)$ utilizando columnas.

Solución Alineamos los términos semejantes en columnas (paso 1).

$$\begin{array}{r}
 4x^2 + 5x + 7 \\
 -(x^2 - 4x + 6)
 \end{array}$$

Alinear términos semejantes.

Cambiar *todos* los signos del segundo renglón (paso 2); después, sumamos (paso 3).

$$\begin{array}{r}
 4x^2 + 5x + 7 \\
 -x^2 + 4x - 6 \\
 \hline
 3x^2 + 9x + 1
 \end{array}$$

Cambiar todos los signos.
Sumar.



EJEMPLO 9 Restar $(2x^2 - 6)$ de $(-3x^3 + 4x - 3)$ usando columnas.

Solución Para ayudar a alinear los términos semejantes, escribimos cada expresión en orden descendente. Si alguna potencia de x no aparece, escribimos dicho término con un coeficiente numérico de 0.

$$-3x^3 + 4x - 3 = -3x^3 + 0x^2 + 4x - 3$$

$$2x^2 - 6 = 2x^2 + 0x - 6$$

Alineamos los términos semejantes.

$$\begin{array}{r} -3x^3 + 0x^2 + 4x - 3 \\ -(2x^2 + 0x - 6) \end{array}$$

Cambiamos todos los signos del segundo renglón; después, sumamos los términos en cada columna.

$$\begin{array}{r} -3x^3 + 0x^2 + 4x - 3 \\ -2x^2 - 0x + 6 \\ \hline -3x^3 - 2x^2 + 4x + 3 \end{array}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 115



Nota: Veremos que podemos cambiar los signos en forma mental, y por ello hacer la alineación y cambio de signos en un solo paso.

Conjunto de ejercicios 4.4

Ejercicios conceptuales

1. ¿Qué es un polinomio?
2. a) ¿Qué es un monomio? Escriba tres ejemplos.
b) ¿Qué es un binomio? Escriba tres ejemplos.
c) ¿Qué es un trinomio? Escriba tres ejemplos.
3. a) Explique cómo se encuentra el grado de un término con una variable.
b) Explique cómo se halla el grado de un polinomio con una variable.
4. Escriba su propio polinomio de quinto grado con tres términos. Explique por qué es un polinomio de quinto grado con tres términos.
5. Explique cómo encontramos el grado de un término en un polinomio con más de una variable.
6. ¿Cuáles de los siguientes son términos de cuarto grado? Explique su respuesta.
a) $3xy^2$ b) $6r^2s^2$ c) $-2mn^3$
7. Explique por qué $(3x + 2) - (4x - 6) \neq 3x + 2 - 4x - 6$.
8. Explique cómo se escribe un polinomio con una variable en orden descendente.
9. ¿Por qué al escribir un polinomio en orden descendente, el término constante siempre se escribe al final?
10. Explique cómo sumamos polinomios.
11. a) Con sus propias palabras, describa la forma de sumar polinomios en columnas.
b) ¿Cómo reescribiría $4x^3 + 5x - 7$ a fin de sumarlo a $3x^3 + x^2 - 4x + 8$, usando columnas? Explique.
12. ¿ $4x^{-3} + 9$ es un polinomio? Explique.
13. ¿ $6m^3 - 5m^{1/2}$ es un polinomio? Explique.
14. ¿ $5x + \frac{2}{x}$ es un polinomio? Explique.

Práctica de habilidades

Indique el grado de cada término.

- | | | | |
|---------------|---------------|------------------|-----------------|
| 15. x^5 | 16. z^9 | 17. $5a^4$ | 18. $-3b^8$ |
| 19. $-12n^7$ | 20. $-13r^6$ | 21. x^2y | 22. a^4b^3 |
| 23. $3r^2s^8$ | 24. $6m^5n^8$ | 25. $-12p^4q^7r$ | 26. $-8x^3y^5z$ |

Indique cuáles expresiones son polinomios. Si el polinomio tiene un nombre específico —monomio, binomio o trinomio—, diga cuál es.

- | | | |
|------------------------------------|----------------------------|--|
| 27. $x^2 + 3$ | 28. $2x^2 - 6x + 7$ | 29. 13 |
| 30. $4x^{-2}$ | 31. $4x^3 - 8$ | 32. $7x + 8$ |
| 33. $7x^3$ | 34. $3x^{1/2} + 2x$ | 35. $a^{-1} + 4$ |
| 36. $x^3 - 8x^2 + 8$ | 37. $6n^3 - 5n^2 + 4n - 3$ | 38. $10x^2$ |
| 39. $4 - 2b^2 - 5b$ | 40. $2x^{-2}$ | 41. $0.6r^4 - \frac{1}{2}r^3 - 0.4r^2 - \frac{1}{3}$ |
| 42. $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{x}$ | | |

Escriba cada polinomio en orden descendente. Si el polinomio ya se encuentra así, dígallo. Proporcione el grado de cada polinomio.

- | | | |
|----------------------------|-----------------------------|---------------------|
| 43. $4 + 5x$ | 44. 5 | 45. $-4 + x^2 - 2x$ |
| 46. $6x - 5$ | 47. $x + 3x^2 - 8$ | 48. $4 - 3p^3$ |
| 49. $-x - 1$ | 50. $2x^2 + 5x - 8$ | 51. $2t^2 - 3t + 4$ |
| 52. 15 | 53. $-4 + x - 3x^2 + 4x^3$ | 54. $1 - x^3 + 3x$ |
| 55. $5x + 3x^2 - 6 - 2x^4$ | 56. $-3r - 5r^2 + 2r^4 - 6$ | |

Sumar.

- | | |
|--|---|
| 57. $(5x + 4) + (x - 5)$ | 58. $(5x - 6) + (2x - 3)$ |
| 59. $(-4x + 8) + (2x + 3)$ | 60. $(-7x - 9) + (-2x + 9)$ |
| 61. $(t + 7) + (-3t - 8)$ | 62. $(4x - 3) + (3x - 3)$ |
| 63. $(x^2 + 2.6x - 3) + (4x + 3.8)$ | 64. $(-4p^2 - 3p - 2) + (-p^2 - 4)$ |
| 65. $(4m - 3) + (5m^2 - 4m + 7)$ | 66. $(-x^2 - 2x - 4) + (4x^2 + 3)$ |
| 67. $(2x^2 - 3x + 5) + (-x^2 + 6x - 8)$ | 68. $(x^2 - 6x + 7) + (-x^2 + 3x + 5)$ |
| 69. $(-x^2 - 4x + 8) + \left(5x - 2x^2 + \frac{1}{2}\right)$ | 70. $(8x^2 + 3x - 5) + \left(x^2 + \frac{1}{2}x + 2\right)$ |
| 71. $(8x^2 + 4) + (-2.6x^2 - 5x - 2.3)$ | 72. $(5.2n^2 - 6n + 1.7) + (3n^2 + 1.2n - 2.3)$ |
| 73. $(-7x^3 - 3x^2 + 4) + (4x + 5x^3 - 7)$ | 74. $(6x^3 - 4x^2 - 7) + (3x^2 + 3x - 3)$ |
| 75. $(8x^2 + 2xy + 4) + (-x^2 - 3xy - 8)$ | 76. $(x^2y + 6x^2 - 3xy^2) + (-x^2y - 12x^2 + 4xy^2)$ |
| 77. $(2x^2y + 2x - 3) + (3x^2y - 5x + 5)$ | 78. $(x^2y + x - y) + (2x^2y + 2x - 6y + 3)$ |

Sumar utilizando columnas.

- | | |
|--|---|
| 79. Sumar $3x - 6$ más $4x + 5$. | 80. Sumar $-2x + 5$ más $-3x - 5$. |
| 81. Sumar $4y^2 - 2y + 4$ más $3y^2 + 1$. | 82. Sumar $9x^2 - 5x - 1$ más $-9x^2 + 6$. |
| 83. Sumar $-x^2 - 3x + 3$ más $5x^2 + 5x - 7$. | 84. Sumar $-2s^2 - s + 5$ más $3s^2 - 6s$. |
| 85. Sumar $2x^3 + 3x^2 + 6x - 9$ más $7 - 4x^2$. | 86. Sumar $-3x^3 + 3x + 9$ más $2x^2 - 4$. |
| 87. Sumar $4n^3 - 5n^2 + n - 6$ más $-n^3 - 6n^2 - 2n + 8$. | 88. Sumar $7x^3 + 5x - 6$ más $3x^3 - 4x^2 - x + 8$. |

Restar.

89. $(4x - 4) - (2x + 2)$
 91. $(-2x - 3) - (-5x - 7)$
 93. $(-r + 5) - (2r + 5)$
 95. $(9x^2 + 7x - 5) - (3x^2 + 3.5)$
 97. $(5x^2 - x - 1) - (-3x^2 - 2x - 5)$
 99. $(-6m^2 - 2m) - (3m^2 - 7m + 6)$
 101. $(8x^3 - 2x^2 - 4x + 5) - (5x^2 + 8)$
 103. $(2x^3 - 4x^2 + 5x - 7) - \left(3x + \frac{3}{5}x^2 - 5\right)$
 105. Restar $(7x + 4)$ de $(8x + 2)$
 107. Restar $(5x - 6)$ de $(2x^2 - 4x + 8)$
 109. Restar $(4x^3 - 6x^2)$ de $(3x^3 + 5x^2 + 9x - 7)$
 90. $(3x - 2) - (4x + 3)$
 92. $(10x - 3) - (-2x + 7)$
 94. $(4x + 8) - (3x + 9)$
 96. $(-y^2 + 4y - 5.2) - (5y^2 + 2.1y + 7.5)$
 98. $(-a^2 + 3a + 12) - (-4a^2 - 3)$
 100. $(7x - 0.6) - (-2x^2 + 4x - 8)$
 102. $\left(9x^3 - \frac{1}{5}\right) - (x^2 + 5x)$
 104. $(-3x^2 + 4x - 7) - \left(x^3 + 4x^2 - \frac{3}{4}x\right)$
 106. Restar $(-4x + 7)$ de $(-3x - 9)$
 108. Restar $(3x^2 - 5x - 3)$ de $(-x^2 + 3x + 10)$
 110. Restar $(-2c^2 + 7c - 7)$ de $(-5c^3 - 6c^2 + 7)$

Ejecute cada resta por medio de columnas.

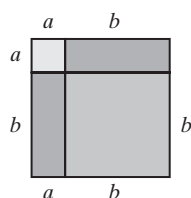
111. Restar $(3x - 3)$ de $(6x + 5)$.
 113. Restar $(-3d - 4)$ de $(-6d + 8)$.
 115. Restar $(6x^2 - 1)$ de $(7x^2 - 3x - 4)$.
 117. Restar $(-5m^2 + 6m)$ de $(m - 6)$.
 119. Restar $(x^2 + 6x - 7)$ de $(4x^3 - 6x^2 + 7x - 9)$.
 112. Restar $(6x + 8)$ de $(2x - 5)$.
 114. Restar $(-3x + 8)$ de $(6x^2 - 5x + 3)$.
 116. Restar $(5n^3 + 7n - 9)$ de $(2n^3 - 6n + 3)$.
 118. Restar $(5x^2 + 4)$ de $(x^2 + 4)$.
 120. Restar $(2x^3 + 4x^2 - 9x)$ de $(-5x^3 + 4x - 12)$.

Solución de problemas

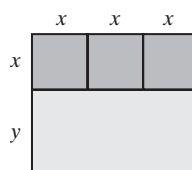
121. Plantee un problema propio, si el resultado de sumar dos binomios es $-2x + 4$.
 122. Construya un problema propio, en el que el resultado de sumar dos trinomios sea $2x^2 + 5x - 6$.
 123. Elabore un problema propio, en el que la diferencia de dos trinomios sea $3x + 5$.
 124. Plantee un problema propio, si la diferencia de dos trinomios es $-x^2 + 4x - 5$.
 125. Cuando sumamos dos binomios, ¿la suma será un binomio siempre, a veces o nunca? Explique su respuesta y proporcione ejemplos que la sustenten.
 126. Al restar un binomio de otro, ¿la diferencia será un binomio siempre, a veces o nunca? Explique la respuesta y proporcione ejemplos que la sustenten.
 127. Si sumamos dos trinomios, ¿el resultado será un trinomio siempre, a veces o nunca? Explique su respuesta y proporcione ejemplos que la apoyen.
 128. Si un trinomio se resta de otro, ¿la diferencia será un trinomio siempre, a veces o nunca? Explique su respuesta y dé ejemplos que la sustenten.
 129. Escriba un trinomio de quinto grado con la variable x , que no tenga términos de tercer grado ni de segundo.
 130. Escriba un trinomio de sexto grado con la variable x , que carezca de términos de quinto grado, cuarto o cero.
 131. ¿Es posible tener un trinomio de quinto grado con x que no tenga términos de cuarto grado, tercero, segundo o primero, y no contenga términos semejantes? Explique su respuesta.
 132. ¿Es posible tener un trinomio de cuarto grado con x que no tenga términos de tercer grado, segundo o cero, y no contenga términos semejantes? Explique su respuesta.

Escriba un polinomio que represente el área de cada una de las figuras mostradas.

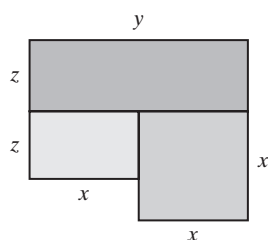
133.



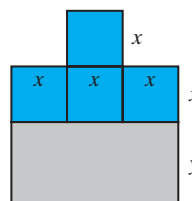
134.



135.



136.



Problemas de reto

Simplificar.

137. $(3x^2 - 6x + 3) - (2x^2 - x - 6) - (x^2 + 7x - 9)$

138. $3x^2y - 6xy - 2xy + 9xy^2 - 5xy + 3x$

139. $4(x^2 + 2x - 3) - 6(2 - 4x - x^2) - 2x(x + 2)$



Actividad en grupo

Como grupo, estudien y solucionen el ejercicio 140.

140. Construyan un trinomio, un binomio y un trinomio diferente tal que
(el primer trinomio) + (el binomio) - (segundo trinomio) = 0.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.5] 141. Inserte cualquiera de los símbolos $>$, $<$ o $=$ en el área sombreada, de modo que el enunciado sea verdadero: $|-9|$ ☐ $|-6|$.

[1.6-1.8] Indique si cada enunciado es verdadero o falso.

142. El producto de dos números negativos siempre es un número positivo.
143. La suma de dos números negativos siempre da como resultado un número negativo.
144. La diferencia de dos números negativos siempre es otro número negativo.

145. El cociente de dos números negativos siempre es otro número negativo.

[4.1] 146. Simplifique la expresión $\left(\frac{4x^3y^5}{12x^7y^4}\right)^3$.

4.5 MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS



- 1 Multiplicar un monomio por otro monomio.
- 2 Multiplicar un polinomio por un monomio.
- 3 Multiplicar binomios por medio de la propiedad distributiva.
- 4 Multiplicar binomios por medio del método PIES.
- 5 Multiplicar binomios con el uso de productos notables.
- 6 Multiplicar un polinomio por otro polinomio.

1 Multiplicar un monomio por otro monomio

Comenzaremos nuestro análisis de la multiplicación de polinomios multiplicando un monomio por otro monomio. Para multiplicar dos monomios, multiplicamos sus coeficientes y empleamos la regla del producto de los exponentes para determinar los exponentes de las variables. En la sección 4.1 resolvimos problemas de este tipo.

EJEMPLO 1 Multiplicar **a)** $(4x^2)(5x^5)$ **b)** $(-6y^4)(8y^7)$

Solución **a)** $(4x^2)(5x^5) = 4 \cdot 5 \cdot x^2 \cdot x^5 = 20x^{2+5} = 20x^7$
b) $(-6y^4)(8y^7) = (-6)(8) \cdot y^4 \cdot y^7 = -48y^{4+7} = -48y^{11}$ 

EJEMPLO 2 Multiplicar $(6x^2y)(7x^5y^4)$.

Solución Recuerde que cuando una variable no tiene exponentes, suponemos que el exponente es 1.

$$(6x^2y)(7x^5y^4) = 42x^{2+5}y^{1+4} = 42x^7y^5$$
 

EJEMPLO 3 Multiplicar **a)** $6xy^2z^5(-3x^4y^7z)$ **b)** $(-4x^4z^9)(-3xy^7z^3)$

Solución **a)** $6xy^2z^5(-3x^4y^7z) = -18x^5y^9z^6$ **b)** $(-4x^4z^9)(-3xy^7z^3) = 12x^5y^7z^{12}$ 

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 21

2 Multiplicar un polinomio por un monomio

Para multiplicar un polinomio por un monomio, empleamos la propiedad distributiva presentada anteriormente.

$$a(b + c) = ab + ac$$

Podemos extender la propiedad distributiva como sigue:

$$a(b + c + d + \cdots + n) = ab + ac + ad + \cdots + an$$

EJEMPLO 4 Multiplicar $3x(2x^2 + 4)$.

Solución $3x(2x^2 + 4) = (3x)(2x^2) + (3x)(4)$
 $= 6x^3 + 12x$ 

Observe que el uso de la propiedad distributiva da como resultado monomios multiplicados por monomios. Si estudiamos el ejemplo 4 veremos que tanto $3x$ como $2x^2$ son monomios, al igual que $3x$ y 4 .

EJEMPLO 5 Multiplicar $-3n(4n^2 - 2n - 1)$.

Solución

$$\begin{aligned} -3n(4n^2 - 2n - 1) &= (-3n)(4n^2) + (-3n)(-2n) + (-3n)(-1) \\ &= -12n^3 + 6n^2 + 3n \end{aligned}$$

**EJEMPLO 6** Multiplicar $5x^2(4x^3 - 2x + 7)$.

Solución

$$\begin{aligned} 5x^2(4x^3 - 2x + 7) &= (5x^2)(4x^3) + (5x^2)(-2x) + (5x^2)(7) \\ &= 20x^5 - 10x^3 + 35x^2 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 35

**EJEMPLO 7** Multiplicar $2x(3x^2y - 6xy + 5)$.

Solución

$$\begin{aligned} 2x(3x^2y - 6xy + 5) &= (2x)(3x^2y) + (2x)(-6xy) + (2x)(5) \\ &= 6x^3y - 12x^2y + 10x \end{aligned}$$



En el ejemplo 8 realizamos una multiplicación en la que colocamos el monomio a la derecha del polinomio. Multiplicamos cada término del polinomio por el monomio, como observamos en el ejemplo.

EJEMPLO 8 Multiplicar $(3x^3 - 2xy + 3)4x$.

Solución

$$\begin{aligned} (3x^3 - 2xy + 3)4x &= (3x^3)(4x) + (-2xy)(4x) + (3)(4x) \\ &= 12x^4 - 8x^2y + 12x \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 41



Pudimos escribir el problema del ejemplo 8 como $4x(3x^3 - 2xy + 3)$, según la propiedad conmutativa de la multiplicación, y después simplificarlo como en los ejemplos 4 a 7.

3 Multiplicar binomios por medio de la propiedad distributiva

A continuación estudiaremos la multiplicación de un binomio por otro. Antes de explicarla, considere el problema de multiplicar $43 \cdot 12$.

$$\begin{array}{r} 43 \leftarrow \text{Multiplicando.} \\ 12 \leftarrow \text{Multiplicador.} \\ \hline 2(4) \longrightarrow 86 \leftarrow 2(3). \\ 1(4) \longrightarrow 43 \leftarrow 1(3). \\ \hline 516 \leftarrow \text{Producto.} \end{array}$$

Observe que el 2 multiplica tanto al 3 como al 4, y el 1 también multiplica tanto al 3 como al 4. Es decir, cada dígito del multiplicador multiplica a cada dígito en el multiplicando. El proceso de la multiplicación también se ilustra como sigue.

$$\begin{aligned} (43)(12) &= (40 + 3)(10 + 2) \\ &= (40 + 3)(10) + (40 + 3)(2) \\ &= (40)(10) + (3)(10) + (40)(2) + (3)(2) \\ &= 400 + 30 + 80 + 6 \\ &= 516 \end{aligned}$$

Siempre que multiplique dos polinomios debe seguir el mismo proceso. Es decir, **cada término de un polinomio debe multiplicar a cada término del otro polinomio.**

Considere la multiplicación de $(a+b)(c+d)$. Si se trata a $(a+b)$ como un solo término y se emplea la propiedad distributiva, se obtiene

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d$$

Al emplear la propiedad distributiva por segunda vez, queda

$$= ac + bc + ad + bd$$

Observe que multiplicamos cada término del primer polinomio por cada término del segundo, y que para obtener la respuesta sumamos todos los productos.

EJEMPLO 9 Multiplicar $(3x+2)(x-5)$.

Solución

$$\begin{aligned}(3x+2)(x-5) &= (3x+2)x + (3x+2)(-5) \\ &= 3x(x) + 2(x) + 3x(-5) + 2(-5) \\ &= 3x^2 + 2x - 15x - 10 \\ &= 3x^2 - 13x - 10\end{aligned}$$



Observe que después realizar la multiplicación redujimos los términos semejantes.

EJEMPLO 10 Multiplicar $(x-4)(y+3)$.

Solución

$$\begin{aligned}(x-4)(y+3) &= (x-4)y + (x-4)3 \\ &= xy - 4y + 3x - 12\end{aligned}$$



4 Multiplicar binomios por medio del método PIES

Un método común empleado para multiplicar dos binomios es el **método PIES**. Este procedimiento también hace que cada término de un binomio se multiplique por cada término del otro. Con frecuencia los estudiantes prefieren utilizar este método para multiplicar dos binomios.

El método PIES

Considere la multiplicación $(a+b)(c+d)$.

P Se refiere a los **primeros** (multiplicar los primeros términos de cada binomio):

$$\begin{array}{c} \text{P} \\ \text{---} \\ (a+b)(c+d) \end{array} \quad \text{producto } ac$$

I Denota los **internos** (multiplicar los dos términos internos):

$$\begin{array}{c} \text{I} \\ \text{---} \\ (a+b)(c+d) \end{array} \quad \text{producto } bc$$

E Son los **externos** (multiplicar los dos términos externos):

$$\begin{array}{c} \text{E} \\ \text{---} \\ (a+b)(c+d) \end{array} \quad \text{producto } ad$$

S Los **segundos** (multiplicar los segundos términos de cada binomio):

$$\begin{array}{c} \text{S} \\ \text{---} \\ (a+b)(c+d) \end{array} \quad \text{producto } bd$$

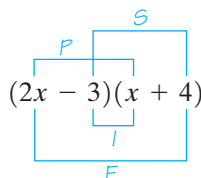
El producto de los dos binomios es la suma de estos cuatro productos.

$$(a+b)(c+d) = ac + bc + ad + bd$$

En sí, el método PIES no es un sistema diferente para multiplicar binomios, sino un acrónimo para ayudar a los estudiantes a recordar la aplicación correcta de la propiedad distributiva. Hubiera podido usarse EPIS o cualquier otro arreglo de las cuatro letras. Sin embargo, PIES es más sencillo de recordar.

EJEMPLO 11 Utilice el método PIES para multiplicar $(2x - 3)(x + 4)$.

Solución



$$\begin{array}{cccc}
 \text{P} & \text{I} & \text{E} & \text{S} \\
 = (2x)(x) + (-3)(x) + (2x)(4) + (-3)(4) \\
 = 2x^2 - 3x + 8x - 12 \\
 = 2x^2 + 5x - 12
 \end{array}$$

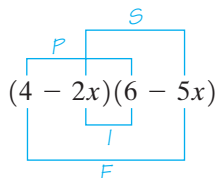
**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 45**

Así, $(2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 5x - 12$.



EJEMPLO 12 Multiplicar $(4 - 2x)(6 - 5x)$.

Solución



$$\begin{array}{cccc}
 \text{P} & \text{I} & \text{E} & \text{S} \\
 = 4(6) + (-2x)(6) + 4(-5x) + (-2x)(-5x) \\
 = 24 - 12x - 20x + 10x^2 \\
 = 10x^2 - 32x + 24
 \end{array}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 63**

Así, $(4 - 2x)(6 - 5x) = 10x^2 - 32x + 24$.



EJEMPLO 13 Multiplicar $(2r + 3)(2r - 3)$.

Solución

$$\begin{array}{cccc}
 \text{P} & \text{I} & \text{E} & \text{S} \\
 (2r + 3)(2r - 3) = (2r)(2r) + (3)(2r) + (2r)(-3) + (3)(-3) \\
 = 4r^2 - 6r + 6r - 9 \\
 = 4r^2 - 9
 \end{array}$$

Así, $(2r + 3)(2r - 3) = 4r^2 - 9$.



SUGERENCIA

CONSEJO PARA ESTUDIAR

Asegúrese de entender por completo la multiplicación de polinomios. En el siguiente capítulo estudiaremos la factorización, que es el proceso inverso de la multiplicación de polinomios. Para entender la factorización, primero debe entender la multiplicación de polinomios.

5 Multiplicar binomios con el uso de productos notables

El ejemplo 13 ilustra un producto notable, el producto de la suma y diferencia de dos términos iguales (**binomios conjugados**).

Producto de la suma y resta de dos términos iguales (binomios conjugados)

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

En este producto notable, a representa un término y b el otro. Entonces, $(a + b)$ es la suma de los términos, y $(a - b)$ es la diferencia de ellos. Este producto notable también se conoce como la **fórmula para la diferencia de cuadrados** ya que la expresión en el lado derecho del signo igual es la diferencia de dos cuadrados.

EJEMPLO 14 Utilice la regla para encontrar el producto de dos binomios conjugados (la suma y diferencia de dos cantidades) para cada expresión.

a) $(x + 5)(x - 5)$ **b)** $(2x + 4)(2x - 4)$ **c)** $(3x + 2y)(3x - 2y)$

Solución **a)** Sea $x = a$ y $5 = b$, entonces

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a - b) & = & a^2 & - & b^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ (x + 5)(x - 5) & = & (x)^2 & - & (5)^2 \\ & & & & & & = x^2 - 25 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a - b) & = & a^2 & - & b^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ (2x + 4)(2x - 4) & = & (2x)^2 & - & (4)^2 \\ & & & & & & = 4x^2 - 16 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a - b) & = & a^2 & - & b^2 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ (3x + 2y)(3x - 2y) & = & (3x)^2 & - & (2y)^2 \\ & & & & & & = 9x^2 - 4y^2 \end{array}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 77**

El ejemplo 14 también hubiera podido resolverse mediante el método PIES.

EJEMPLO 15 Con el método PIES, encuentre $(x + 3)^2$.

Solución $(x + 3)^2 = (x + 3)(x + 3)$

$$\begin{array}{ccccccc} & P & & I & & E & & S \\ & x & & 3 & & x & & 3 \\ = & x(x) & + & 3(x) & + & x(3) & + & (3)(3) \\ = & x^2 & + & 3x & + & 3x & + & 9 \\ = & x^2 & + & 6x & + & 9 \end{array}$$

El ejemplo 15 ilustra el **cuadrado de un binomio**, que es otro producto notable.

Fórmulas del cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$$

Para elevar un binomio al cuadrado, sumamos el cuadrado del primer término más el doble producto de los dos términos, más el cuadrado del segundo término.

EJEMPLO 16 Utilice la fórmula del cuadrado de un binomio para multiplicar cada expresión.

a) $(x + 5)^2$ **b)** $(2x - 4)^2$ **c)** $(3r + 2s)^2$ **d)** $(x - 3)(x - 3)$

Solución **a)** Sea $x = a$ y $5 = b$, entonces

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a + b) & = & a^2 & + & 2ab & + & b^2 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \\ (x + 5)(x + 5) & = & (x)^2 & + & 2(x)(5) & + & (5)^2 \\ & & & & = x^2 + 10x + 25 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{ccccccc} (a - b)(a - b) & = & a^2 & - & 2ab & + & b^2 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \\ (2x - 4)(2x - 4) & = & (2x)^2 & - & 2(2x)(4) & + & (4)^2 \\ & & = 4x^2 - 16x + 16 \end{array}$$

c)

$$\begin{array}{ccccccc} (a + b)(a + b) & = & a^2 & + & 2ab & + & b^2 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \\ (3r + 2s)(3r + 2s) & = & (3r)^2 & + & 2(3r)(2s) & + & (2s)^2 \\ & & = 9r^2 + 12rs + 4s^2 \end{array}$$

d)

$$\begin{array}{ccccccc} (a - b)(a - b) & = & a^2 & - & 2ab & + & b^2 \\ \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \downarrow & & \downarrow \\ (x - 3)(x - 3) & = & (x)^2 & - & 2(x)(3) & + & (3)^2 \\ & & = x^2 - 6x + 9 \end{array}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 83



El ejemplo 16 también hubiera podido resolverse con el método PIES.

**CÓMO EVITAR
ERRORES COMUNES**

CORRECTO

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

INCORRECTO

~~$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$~~

~~$$(a - b)^2 = a^2 - b^2$$~~

Al elevar al cuadrado un binomio, no hay que olvidar el término medio.

$$(x + 2)^2 \neq x^2 + 4$$

$$\begin{aligned} (x + 2)^2 &= (x + 2)(x + 2) \\ &= x^2 + 4x + 4 \end{aligned}$$

6 Multiplicar un polinomio por otro polinomio

Al multiplicar un binomio por otro, vimos que cada término del primero se multiplica por cada término del segundo. Cuando se trata de dos polinomios, debemos multiplicar cada término de un polinomio por cada término del otro. En la multiplicación $(3x + 2)(4x^2 - 5x - 3)$, utilizamos la propiedad distributiva del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 & (3x + 2)(4x^2 - 5x - 3) \\
 &= 3x(4x^2 - 5x - 3) + 2(4x^2 - 5x - 3) \\
 &= 12x^3 - 15x^2 - 9x + 8x^2 - 10x - 6 \\
 &= 12x^3 - 7x^2 - 19x - 6
 \end{aligned}$$

Por tanto, $(3x + 2)(4x^2 - 5x - 3) = 12x^3 - 7x^2 - 19x - 6$.

Podemos resolver los problemas de multiplicación utilizando la propiedad distributiva, como acabamos de mostrar; sin embargo, muchos estudiantes prefieren multiplicar un polinomio por otro en forma vertical. En la página 281 mostramos que para multiplicar 43 por 12, multiplicamos cada dígito del número 43 por cada dígito del número 12. Ahora lo invitamos a revisar ese ejemplo. Cuando multipliquemos un polinomio por otro es posible seguir un procedimiento similar, como en los siguientes ejemplos; no obstante, al ejecutar las multiplicaciones individuales debemos tener cuidado para alinear los términos semejante en sus columnas correspondientes.

EJEMPLO 17 Multiplicar $(3x + 4)(2x + 5)$.

Solución En primer lugar escribimos los polinomios uno sobre el otro.

$$\begin{array}{r}
 3x + 4 \\
 2x + 5 \\
 \hline
 \end{array}$$

A continuación, multiplicamos cada término de $(3x + 4)$ por 5.

$$\begin{array}{r}
 3x + 4 \\
 2x + 5 \\
 \hline
 5(3x + 4) \longrightarrow 15x + 20
 \end{array}$$

En seguida, multiplicamos cada término de $(3x + 4)$ por $2x$, y alineamos los términos semejantes.

$$\begin{array}{r}
 3x + 4 \\
 2x + 5 \\
 \hline
 15x + 20
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 2x(3x + 4) \longrightarrow 6x^2 + 8x \\
 \hline
 6x^2 + 23x + 20
 \end{array}$$

Sumar términos semejantes por columnas.



Con el método PIES, hubiéramos obtenido la misma respuesta para el ejemplo 17.

EJEMPLO 18 Multiplicar $(3x - 2)(5x^2 + 6x - 4)$.

Solución Por conveniencia, colocamos la expresión más corta en la parte inferior

$$\begin{array}{r}
 5x^2 + 6x - 4 \\
 3x - 2 \\
 \hline
 \end{array}$$

$-10x^2 - 12x + 8$ *Multiplicar el polinomio de arriba por -2 .*

$15x^3 + 18x^2 - 12x$ *Multiplicar el polinomio de arriba por $3x$, y alineamos los términos semejantes.*

$15x^3 + 8x^2 - 24x + 8$ *Sumamos términos semejantes por columnas.*



EJEMPLO 19 Multiplicar $x^2 - 3x + 2$ por $2x^2 - 3$.

Solución

$$\begin{array}{r}
 x^2 - 3x + 2 \\
 2x^2 - 3 \\
 \hline
 \end{array}$$

$-3x^2 + 9x - 6$ *Multiplicar el polinomio de arriba por -3 .*

$2x^4 - 6x^3 + 4x^2$ *Multiplicar el polinomio de arriba por $2x^2$; alinear términos semejantes.*

$2x^4 - 6x^3 + x^2 + 9x - 6$ *Sumar términos semejantes por columnas.*



EJEMPLO 20 Multiplicar $(3x^3 - 2x^2 + 4x + 6)(x^2 - 5x)$.**Solución**

$$\begin{array}{r}
 3x^3 - 2x^2 + 4x + 6 \\
 x^2 - 5x \\
 \hline
 -15x^4 + 10x^3 - 20x^2 - 30x \\
 3x^5 - 2x^4 + 4x^3 + 6x^2 \\
 \hline
 3x^5 - 17x^4 + 14x^3 - 14x^2 - 30x
 \end{array}$$

Multiplicar el polinomio de arriba por $-5x$.Multiplicar el polinomio de arriba por x^2 ; alinear términos semejantes.

Sumar términos semejantes por columnas.

**Conjunto de ejercicios 4.5****Ejercicios conceptuales**

- ¿Cuál es el nombre de la propiedad que empleamos para multiplicar un monomio por un polinomio?
- Explique cómo se multiplica un monomio por otro monomio.
- ¿Qué significan las letras del acrónimo PIES?
- ¿Cómo funciona el método PIES cuando multiplicamos dos binomios?
- Al multiplicar dos binomios, ¿obtenemos el mismo resultado si multiplicamos en el orden SIEP, en lugar de PIES? Explique su respuesta.
- ¿Por qué denominamos al producto notable $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, también como *fórmula de la diferencia de cuadrados*?
- Escriba las fórmulas de cuadrado de un binomio.
- En sus propias palabras describa cómo elevamos un binomio al cuadrado.
- ¿Se cumple que $(x + 5)^2 = x^2 + 5^2$? Explique su respuesta. Si no se cumple, ¿cuál es el resultado correcto?
- ¿Es verdad que $(x + 3)^2 = x^2 + 3^2$? Explique. Si no es verdad, ¿cuál es la respuesta correcta?
- Escriba un problema de multiplicación en el que multipliquemos un monomio con x por un binomio con x . Calcule el producto.
- Escriba un problema de multiplicación en el que multipliquemos un monomio con y por un trinomio con y . Determine el producto.
- Escriba un problema de multiplicación donde multipliquemos dos binomios con x . Obtenga el producto.
- Cuando multiplicamos dos polinomios, ¿es necesario que cada término de uno multiplique a cada término del otro?

Práctica de habilidades*Multiplicar.*

- | | | |
|-----------------------------|---------------------------|--|
| 15. $x^3 \cdot 2xy$ | 16. $6xy^2 \cdot 3xy^4$ | 17. $5x^3y^5(4x^2y)$ |
| 18. $-5x^2y^4(2x^3y^2)$ | 19. $4x^4y^6(-7x^2y^9)$ | 20. $4a^3b^7(6a^2b)$ |
| 21. $9xy^6 \cdot 6x^5y^8$ | 22. $(6m^3n^4)(3n^5)$ | 23. $(6x^2y)\left(\frac{1}{2}x^4\right)$ |
| 24. $\frac{3}{4}x(8x^2y^3)$ | 25. $(3.3x^4)(1.8x^4y^3)$ | 26. $(2.3x^5)(4.1x^2y^4)$ |

Multiplicar.

- | | |
|------------------------------|---|
| 27. $5(x + 4)$ | 28. $3(x - 4)$ |
| 29. $-3x(2x - 2)$ | 30. $-4p(-3p + 6)$ |
| 31. $-2(8y + 5)$ | 32. $2x(x^2 + 3x - 1)$ |
| 33. $-2x(x^2 - 2x + 5)$ | 34. $-6c(-3c^2 + 5c - 6)$ |
| 35. $5x(-4x^2 + 6x - 4)$ | 36. $(x^2 - x + 1)x$ |
| 37. $0.5x^2(x^3 - 6x^2 - 1)$ | 38. $2.3b^2(2b^2 - b + 3)$ |
| 39. $0.3x(2xy + 5x - 6y)$ | 40. $-\frac{1}{2}x^3(2x^2 + 4x - 6y^2)$ |
| 41. $(x^2 - 4y^3 - 3)y^4$ | 42. $\frac{1}{4}y^4(y^2 - 12y + 4x)$ |

Multiplicar.

43. $(x + 3)(x + 4)$

45. $(2x + 5)(3x - 6)$

47. $(2x - 4)(2x + 4)$

49. $(5 - 3x)(6 + 2x)$

51. $(6x - 1)(-2x + 5)$

53. $(x - 2)(4x - 2)$

55. $(3k - 6)(4k - 2)$

57. $(x - 2)(x + 2)$

59. $(2x - 3)(2x - 3)$

61. $(6z - 4)(7 - z)$

63. $(2x + 3)(4 - 2x)$

65. $(x + y)(x - y)$

67. $(2x - 3y)(3x + 2y)$

69. $(3x + y)(2 + 2x)$

71. $(x + 0.6)(x + 0.3)$

73. $(2y - 4)\left(\frac{1}{2}x - 1\right)$

44. $(2x - 3)(x + 5)$

46. $(4a - 1)(a + 4)$

48. $(4 + 5w)(3 + w)$

50. $(-x + 3)(2x + 5)$

52. $(2n - 4)(3n - 2)$

54. $(2x + 3)(x + 5)$

56. $(3d - 5)(4d - 1)$

58. $(3x - 8)(2x + 3)$

60. $(7x + 3)(2x + 4)$

62. $(6 - 2m)(5m - 3)$

64. $(5 - 6x)(2x - 7)$

66. $(z + 2y)(4z - 3)$

68. $(2x + 3)(2y - 5)$

70. $(2x - 0.1)(x + 2.4)$

72. $(3x - 6)\left(x + \frac{1}{3}\right)$

74. $(x + 4)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

Con alguna fórmula de productos notables, haga las siguientes multiplicaciones.

75. $(x + 6)(x - 6)$

78. $(r - 4)(r - 4)$

81. $(x - 0.2)^2$

84. $(5x + 4)(5x - 4)$

87. $(5a - 7b)(5a + 7b)$

90. $(-3m + 2n)(-3m - 2n)$

76. $(x + 3)^2$

79. $(x + y)^2$

82. $(a + 3b)(a - 3b)$

85. $(0.4x + y)^2$

88. $(4 + 3w)(4 - 3w)$

91. $(7a + 2)^2$

77. $(3x - 3)(3x + 3)$

80. $(2x - 3)(2x + 3)$

83. $(4x + 5)(4x + 5)$

86. $\left(x - \frac{1}{2}y\right)^2$

89. $(-2x + 6)(-2x - 6)$

92. $(7s - 3t)^2$

Multiplicar.

93. $(x + 4)(3x^2 + 4x - 1)$

95. $(3x + 2)(4x^2 - x + 5)$

97. $(-2x^2 - 4x + 1)(7x - 3)$

99. $(-3a + 5)(2a^2 + 4a - 3)$

101. $(3x^2 - 2x + 4)(2x^2 + 3x + 1)$

103. $(x^2 - x + 3)(x^2 - 2x)$

105. $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$

94. $(4m + 3)(4m^2 - 5m + 6)$

96. $(x - 1)(3x^2 + 3x + 2)$

98. $(4x^2 + 9x - 2)(x - 2)$

100. $(5d^2 + 1)(3d - 2)$

102. $(x^2 - 2x + 3)(x^2 - 4)$

104. $(6x + 4)(2x^2 + 2x - 4)$

106. $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Determine el cubo de cada expresión como el cuadrado de una expresión multiplicada por otra. Por ejemplo,
 $(x + 3y)^3 = (x + 3y)(x + 3y)^2$.

107. $(x + 2)^3$

109. $(3a - 5)^3$

108. $(b - 1)^3$

110. $(2z + 3)^3$

Solución de problemas

111. El producto de un monomio por un binomio, ¿será siempre un trinomio? Explique su respuesta.
112. El producto de un monomio por otro, ¿será siempre un monomio? Explique su respuesta.
113. El producto de dos binomios después de reducir los términos semejantes, ¿es siempre un trinomio? Explique su respuesta.
114. El producto de cualquier polinomio por un binomio, ¿es siempre un polinomio? Explique.

Considere las multiplicaciones de los ejercicios 115 y 116. Determine los exponentes por colocar en las áreas sombreadas.

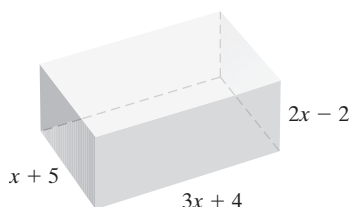
115. $3x^2(2x^{\square} - 5x^{\square} + 3x^{\square}) = 6x^8 - 15x^5 + 9x^3$.

116. $4x^3(x^{\square} + 2x^{\square} - 5x^{\square}) = 4x^7 + 8x^5 - 20x^4$.

117. Suponga que un lado de un rectángulo se representa como $x + 2$, y el otro lado como $2x + 1$.

- Expresé el área del rectángulo en términos de x .
- Encuentre el área si $x = 4$ pies.
- ¿Qué valor tendría x , en pies, si el rectángulo fuera un cuadrado? Explique cómo determinó su respuesta.

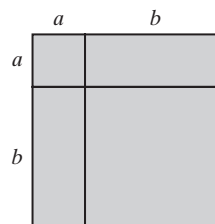
118. Suponga que un sólido rectangular tiene una longitud de $x + 5$, ancho de $3x + 4$, y altura de $2x - 2$ (vea la figura).



- Escriba un polinomio que represente el área de la base, con la multiplicación de la longitud por el ancho.
- El volumen de la figura se encuentra con la multiplicación del área de la base por la altura. Escriba un polinomio que represente el volumen de la figura.

- Utilice el polinomio del inciso **b)**, calcule el volumen de la figura si x es igual a 4 pies.
- Con el uso de los binomios dados para la longitud, ancho y altura, calcule el volumen si x es igual a 4 pies.
- ¿Las respuestas para los incisos **c)** y **d)** son las mismas? Si no lo son, explique por qué.

119. Considere la siguiente figura.



- Escriba una expresión para la longitud de la parte superior.
- Escriba una expresión para la longitud del lado izquierdo.
- ¿Es esta figura un cuadrado? Explique.
- Expresé el área de este cuadrado como el cuadrado de un binomio.
- Determine el área del cuadrado con la suma de las áreas de los cuatro elementos individuales.
- Con el uso de la figura y la respuesta del inciso **e)**, complete la siguiente ecuación

$$(a + b)^2 = ?$$

Problemas de reto

Multiplique.

120. $\left(\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{2}{5}\right)$

121. $(2x^3 - 6x^2 + 5x - 3)(3x^3 - 6x + 4)$



Actividad en grupo

122. Consideren el trinomio $2x^2 + 7x + 3$.

- Como grupo, determinen si existe un número máximo de parejas de binomios cuyo producto sea $2x^2 + 7x + 3$. Es decir, ¿cuántas parejas diferentes de binomios podrían ocupar las áreas sombreadas?

$$2x^2 + 7x + 3 = (\square)(\square)$$

- En forma individual, encuentre una pareja de binomios cuyo producto sea $2x^2 + 7x + 3$.
- Compare su respuesta para el inciso **b)** con las del resto del grupo. Si no llegaron a la misma solución, expliquen por qué.

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.5] 123. Resuelva la ecuación $4(x + 2) - 3 = 4x + 5$.

[3.3] 124. **Viaje en taxi** El costo de un viaje en taxi es de \$2.00 por la primera milla y \$1.50 por cada milla adicional o fracción. Encuentre la distancia máxima que Bill Lee puede viajar en taxi si sólo tiene \$20.

[4.1] 125. Simplifique la expresión $\left(\frac{3xy^4}{6y^6}\right)^4$.

[4.1–4.2] 126. Evalúe lo siguiente.

a) -6^3 b) 6^{-3}

[4.4] 127. Reste $4x^2 - 4x - 3$ de $-x^2 - 6x + 5$.

4.6 DIVISIÓN DE POLINOMIOS



- 1 Dividir un polinomio entre un monomio.
- 2 Dividir un polinomio entre un binomio.
- 3 Comprobación de problemas de división de polinomios.
- 4 Escribir polinomios en orden descendente al dividir.

1 Dividir un polinomio entre un monomio

A continuación veremos cómo dividir polinomios. Comenzaremos con la división de un polinomio entre un monomio.

Para dividir un polinomio entre un monomio

Dividimos cada término del polinomio entre el monomio.

EJEMPLO 1 Dividir a) $\frac{2x + 16}{2}$ b) $\frac{10x^2 - 4x}{2x}$

Solución a) $\frac{2x + 16}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{16}{2} = x + 8$
 b) $\frac{10x^2 - 4x}{2x} = \frac{10x^2}{2x} - \frac{4x}{2x} = 5x - 2$

CÓMO EVITAR
ERRORES COMUNES

CORRECTO

$$\frac{x + 2}{2} = \frac{x}{2} + \frac{2}{2} = \frac{x}{2} + 1$$

$$\frac{x + 2}{x} = \frac{x}{x} + \frac{2}{x} = 1 + \frac{2}{x}$$

INCORRECTO

~~$$\frac{x + 2}{2} = \frac{x + 1}{1} = x + 1$$~~

~~$$\frac{x + 2}{x} = \frac{1 + 2}{1} = 3$$~~

¿Puede explicar por qué los procedimientos de la derecha no son correctos?

EJEMPLO 2 Dividir: $\frac{4t^5 - 6t^4 + 8t - 3}{2t^2}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{4t^5 - 6t^4 + 8t - 3}{2t^2} &= \frac{4t^5}{2t^2} - \frac{6t^4}{2t^2} + \frac{8t}{2t^2} - \frac{3}{2t^2} \\ &= 2t^3 - 3t^2 + \frac{4}{t} - \frac{3}{2t^2} \end{aligned}$$



EJEMPLO 3 Dividir: $\frac{3x^3 - 6x^2 + 4x - 1}{-3x}$.

Solución

Aparece un signo negativo en el denominador. Por lo general, es más fácil dividir si el divisor es positivo. A fin de obtener un denominador positivo, es posible multiplicar tanto el numerador como el denominador entre -1 .

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 37

$$\begin{aligned}\frac{(-1)(3x^3 - 6x^2 + 4x - 1)}{(-1)(-3x)} &= \frac{-3x^3 + 6x^2 - 4x + 1}{3x} \\ &= \frac{-3x^3}{3x} + \frac{6x^2}{3x} - \frac{4x}{3x} + \frac{1}{3x} \\ &= -x^2 + 2x - \frac{4}{3} + \frac{1}{3x}\end{aligned}$$



2 Dividir un polinomio entre un binomio

Dividimos un polinomio entre un binomio de manera muy parecida a como realizamos una división larga. Explicaremos este procedimiento en el ejemplo 4.

EJEMPLO 4 Dividir: $\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2}$. ← Dividendo.
← Divisor.

Solución Reescribimos el problema de la división de la siguiente manera:

$$x + 2 \overline{) x^2 + 6x + 8}$$

Dividimos x^2 (el primer término del dividendo) entre x (el primer término del divisor).

$$\frac{x^2}{x} = x$$

Colocamos el cociente, x , sobre el término semejante que contiene a x en el dividendo.

$$x + 2 \overline{) x^2 + 6x + 8} \quad \begin{matrix} x \\ \hline \end{matrix}$$

A continuación, multiplicamos la x por $x + 2$, como haríamos en una división larga, y colocamos los términos del producto debajo de sus términos semejantes.

$$\begin{array}{r} \text{Por } \quad \quad \quad x \\ x + 2 \overline{) x^2 + 6x + 8} \\ \underline{x^2 + 2x} \quad \leftarrow x(x + 2) \\ \text{Es igual a } \end{array}$$

Ahora, restamos $x^2 + 2x$ de $x^2 + 6x$. Al restar, recuerde cambiar el signo de los términos restados y después sumar los términos semejantes.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2 \overline{) x^2 + 6x + 8} \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ 4x \end{array}$$

Posteriormente, bajamos el 8, que es el segundo término del dividendo.

$$\begin{array}{r} x \\ x + 2 \overline{) x^2 + 6x + 8} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 4x + 8 \end{array}$$

Ahora, dividimos $4x$, primer término de la parte inferior, entre x , primer término del divisor.

$$\frac{4x}{x} = +4$$

Escribimos el $+4$ en el cociente, sobre la constante del dividendo.

$$\begin{array}{r} x + 4 \\ x + 2 \overline{) x^2 + 6x + 8} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 4x + 8 \end{array}$$

Multiplicamos $x + 2$ por 4 y colocamos los términos del producto debajo de sus términos semejantes.

$$\begin{array}{r} \text{Por} \quad x + 4 \\ x + 2 \overline{) x^2 + 6x + 8} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 4x + 8 \\ \text{Es igual a} \quad 4x + 8 \leftarrow 4(x + 2) \end{array}$$

Ahora, restamos.

$$\begin{array}{r} x + 4 \leftarrow \text{Cociente.} \\ x + 2 \overline{) x^2 + 6x + 8} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ 4x + 8 \\ \underline{4x + 8} \\ 0 \leftarrow \text{Residuo.} \end{array}$$

Por tanto,

$$\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2} = x + 4$$

No hay residuo.



EJEMPLO 5 Dividir: $\frac{6x^2 - 5x + 5}{2x + 3}$.

Solución

$$\begin{array}{r} \frac{6x^2}{2x} \quad \frac{-14x}{2x} \\ \overbrace{3x - 7} \\ 2x + 3 \overline{) 6x^2 - 5x + 5} \\ \underline{6x^2 + 9x} \leftarrow 3x(2x + 3). \\ -14x + 5 \\ \underline{+14x + 21} \leftarrow -7(2x + 3). \\ 26 \leftarrow \text{Residuo.} \end{array}$$

Cuando existe un residuo, como en este ejemplo, colocamos el cociente, agregando el residuo sobre el divisor. Por tanto,

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 57

$$\frac{6x^2 - 5x + 5}{2x + 3} = 3x - 7 + \frac{26}{2x + 3}$$



3 Comprobación de problemas de división de polinomios

Podemos comprobar la respuesta de un problema de división. Consideremos el problema de dividir $13 \div 5$.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 5 \overline{)13} \\ 10 \\ \hline 3 \end{array}$$

Observe que el divisor por el cociente, más el residuo, es igual al dividendo:

$$(\text{divisor} \times \text{cociente}) + \text{residuo} = \text{dividendo}$$

$$(5 \cdot 2) + 3 \stackrel{?}{=} 13$$

$$10 + 3 \stackrel{?}{=} 13$$

$$13 = 13 \quad \text{Verdadero.}$$

Utilizamos este mismo procedimiento para verificar todos los problemas de división.

Para verificar la división de polinomios

$$(\text{divisor} \times \text{cociente}) + \text{residuo} = \text{dividendo}$$

Comprobaremos la respuesta del ejemplo 5. El divisor es $2x + 3$, el cociente es $3x - 7$, el residuo es 26, y el dividendo es $6x^2 - 5x + 5$.

Comprobación $(\text{divisor} \times \text{cociente}) + \text{residuo} = \text{dividendo}$

$$(2x + 3)(3x - 7) + 26 \stackrel{?}{=} 6x^2 - 5x + 5$$

$$(6x^2 - 5x - 21) + 26 \stackrel{?}{=} 6x^2 - 5x + 5$$

$$6x^2 - 5x + 5 = 6x^2 - 5x + 5 \quad \text{Verdadero.}$$

4 Escribir polinomios en orden descendente al dividir

Al dividir un polinomio entre un binomio, escribimos tanto el polinomio como el binomio en orden descendente. Si no existe un término elevado a una potencia dada, a menudo es útil incluirlo con un coeficiente de 0, para conservar el lugar. Esto ayudará a mantener los términos semejantes alineados. Por ejemplo, para dividir $(6x^2 + x^3 - 4)/(x - 2)$, comenzamos por escribir $(x^3 + 6x^2 + 0x - 4)/(x - 2)$.

EJEMPLO 6 Dividir $(-x + 9x^3 - 28)$ entre $(3x - 4)$.

Solución En primer lugar, reescribimos el dividendo en orden descendente a fin de obtener $(9x^3 - x - 28) \div (3x - 4)$. Como en el dividendo no existe un término con x^2 , sumaremos $0x^2$ para alinear los términos semejantes.

$$\begin{array}{r}
 \frac{9x^3}{3x} \quad \frac{12x^2}{3x} \quad \frac{15x}{3x} \\
 \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 3x^2 + 4x + 5 \\
 3x - 4 \overline{) 9x^3 + 0x^2 - x - 28} \\
 \underline{9x^3 - 12x^2} \quad \leftarrow 3x^2(3x - 4). \\
 12x^2 - x \\
 \underline{12x^2 - 16x} \quad \leftarrow 4x(3x - 4). \\
 15x - 28 \\
 \underline{15x - 20} \quad \leftarrow 5(3x - 4). \\
 -8 \quad \leftarrow \text{Residuo.}
 \end{array}$$

Por tanto, $\frac{-x + 9x^3 - 28}{3x - 4} = 3x^2 + 4x + 5 - \frac{8}{3x - 4}$. Lo invitamos a comprobar esta división por sí mismo empleando el procedimiento que acabamos de estudiar.

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 61**



Conjunto de ejercicios 4.6

Ejercicios conceptuales

1. Explique cómo dividir un polinomio entre un monomio.
2. Explique cómo comprobamos un problema de división.
3. Explique por qué $\frac{y + 5}{y} \neq \frac{1 + 5}{1}$. Después, haga la división del binomio entre el monomio en forma correcta.
4. Explique por qué $\frac{2x + 8}{2} \neq \frac{x + 8}{1}$. Después, haga de manera correcta la división del binomio entre el monomio.
5. ¿Cómo deben escribirse los términos de un polinomio y un binomio cuando van a dividirse?
6. ¿Cómo se reescribiría $\frac{x^2 - 7}{x - 2}$ de modo que sea más fácil realizar la división?
7. ¿Cómo reescribiría $\frac{x^3 - 14x + 15}{x - 3}$ de modo que más fácil realizar la división?
8. Demuestre que $\frac{x^2 - 3x + 7}{x + 2} = x - 5 + \frac{17}{x + 2}$, comprobando la división.
9. Demuestre que $\frac{x^2 + 2x - 17}{x - 3} = x + 5 - \frac{2}{x - 3}$, comprobando la división.
10. Demuestre que $\frac{x^3 + 2x - 3}{x + 1} = x^2 - x + 3 - \frac{6}{x + 1}$, comprobando la división.

Reescriba cada problema de multiplicación como un problema de división. Existe más de una respuesta correcta.

11. $(x - 4)(x + 5) = x^2 + x - 20$

12. $(x + 3)(3x - 1) = 3x^2 + 8x - 3$

13. $(2x + 3)(x + 1) = 2x^2 + 5x + 3$

14. $(2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 5x - 12$

15. $(2x + 3)(2x - 3) = 4x^2 - 9$

16. $(3n + 4)(n - 5) = 3n^2 - 11n - 20$

Práctica de habilidades

Dividir.

17. $\frac{3x + 6}{3}$

20. $(-3x - 8) \div 4$

23. $\frac{-6x + 4}{2}$

26. $\frac{5x - 4}{-5}$

29. $\frac{4 - 10w}{-4}$

32. $\frac{12x^2 - 6x + 3}{3}$

35. $(x^5 + 3x^4 - 3) \div x^3$

38. $\frac{7x^2 + 14x - 5}{-7}$

41. $\frac{12x^5 + 3x^4 - 10x^2 - 9}{-3x^2}$

18. $\frac{4x - 6}{2}$

21. $\frac{3x + 8}{2}$

24. $\frac{-5a + 4}{-3}$

27. $\frac{2x + 16}{4}$

30. $\frac{6 - 5x}{-3x}$

33. $\frac{-4x^5 + 6x + 8}{2x^2}$

36. $(6x^2 - 7x + 9) \div 3x$

39. $\frac{8k^3 + 6k^2 - 8}{-4k}$

42. $\frac{-15m^3 - 6m^2 + 15}{-5m^3}$

19. $\frac{4n + 10}{2}$

22. $\frac{5x - 10}{5}$

25. $\frac{-9x - 3}{-3}$

28. $\frac{2p - 3}{2p}$

31. $(3x^2 + 6x - 9) \div 3x^2$

34. $\frac{6t^2 + 3t + 8}{2}$

37. $\frac{6x^5 - 4x^4 + 12x^3 - 5x^2}{2x^3}$

40. $\frac{-12x^4 + 6x^2 - 15x + 4}{-3x}$

Dividir.

43. $\frac{x^2 + 4x + 3}{x + 1}$

46. $\frac{2p^2 - 7p - 15}{p - 5}$

49. $\frac{x^2 - 16}{-4 + x}$

52. $\frac{x^2 - 36}{x - 6}$

55. $\frac{6x + 8x^2 - 25}{4x + 9}$

58. $\frac{x^3 + 5x^2 + 2x - 8}{x + 2}$

61. $\frac{2x^3 - 4x^2 + 12}{x - 2}$

64. $\frac{x^3 + 8}{x + 2}$

67. $\frac{4x^3 - 5x}{2x - 1}$

70. $\frac{-x^3 + 3x^2 + 14x + 16}{x + 3}$

44. $(2x^2 + 3x - 35) \div (x + 5)$

47. $\frac{6x^2 + 16x + 8}{3x + 2}$

50. $\frac{6t^2 - t - 40}{2t + 5}$

53. $(4a^2 - 25) \div (2a - 5)$

56. $\frac{10x + 3x^2 + 6}{x + 2}$

59. $\frac{3x^3 + 18x^2 - 5x - 30}{x + 6}$

62. $\frac{2x^3 + 6x - 4}{x + 4}$

65. $\frac{x^3 - 27}{x - 3}$

68. $\frac{9x^3 - x + 3}{3x - 2}$

71. $\frac{9n^3 - 6n + 4}{3n - 3}$

45. $\frac{2x^2 - 9x - 18}{x - 6}$

48. $\frac{3r^2 + 5r - 8}{r - 1}$

51. $(2x^2 + 7x - 18) \div (2x - 3)$

54. $\frac{9x^2 - 16}{3x - 4}$

57. $\frac{6x + 8x^2 - 12}{2x + 3}$

60. $\frac{2x^3 - 3x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

63. $(w^3 - 8) \div (w - 3)$

66. $\frac{x^3 + 27}{x + 3}$

69. $\frac{-m^3 - 6m^2 + 2m - 3}{m - 1}$

72. $\frac{4t^3 - t + 4}{t + 2}$

Solución de problemas

73. Al dividir un binomio entre un monomio, ¿el cociente debe ser un binomio? Explique y dé un ejemplo que apoye su respuesta.
74. Al dividir un trinomio entre un monomio, ¿el cociente debe ser un trinomio? Explique y proporcione un ejemplo que apoye su respuesta.
75. Si el divisor es $x + 4$, el cociente es $2x + 3$, y el residuo es 4, encuentre el dividendo (o el polinomio que fue dividido).
76. Si el divisor es $2x - 3$, el cociente es $3x - 1$, y el residuo es -2 , encuentre el dividendo.
77. Si dividimos un polinomio de segundo grado con x , entre un polinomio de primer grado con x , ¿cuál será el grado del cociente? Explique su respuesta.
78. Si dividimos un polinomio de tercer grado con x entre otro de primer grado con x , ¿de qué grado será el cociente? Explique su respuesta.

Determine las expresiones que deben colocarse en las áreas sombreadas, de modo que el enunciado sea verdadero. Explique cómo determinó su respuesta.

79. $\frac{16x^4 + 20x^3 - 4x^2 + 12x}{\boxed{}} = 4x^3 + 5x^2 - x + 3$

80. $\frac{9x^5 - 6x^4 + 3x^2 + 12}{\boxed{}} = 3x^3 - 2x^2 + 1 + \frac{4}{x^2}$

Determine los exponentes que deben colocarse en las áreas sombreadas, de manera que el enunciado sea verdadero. Explique la forma en que determinó su respuesta.

81. $\frac{8x^{\boxed{}} + 4x^{\boxed{}} - 20x^{\boxed{}} - 5x^{\boxed{}}}{2x^2} = 4x^3 + 2x - 10 - \frac{5}{2x}$

82. $\frac{15x^{\boxed{}} + 25x^{\boxed{}} + 5x^{\boxed{}} + 10x^{\boxed{}}}{5x^2} = 3x^5 + 5x^4 + x^2 + 2$

Problemas de reto

Dividir. El cociente de los ejercicios 83 y 84 tendrá fracciones.

83. $\frac{4x^3 - 4x + 6}{2x + 3}$

84. $\frac{3x^3 - 5}{3x - 2}$

85. $\frac{3x^2 + 6x - 10}{-x - 3}$



Actividad en grupo

Como grupo, estudien y solucionen los ejercicios 86 y 87. Determinen el polinomio que al sustituirse en el área sombreada genera un enunciado verdadero. Expliquen la manera en que determinaron su respuesta.

86. $\frac{\boxed{}}{x + 4} = x + 2 + \frac{2}{x + 4}$

87. $\frac{\boxed{}}{x + 3} = x + 1 - \frac{1}{x + 3}$

Ejercicios de repaso acumulativo

- [1.4] 88. Considere el conjunto de números $\{2, -5, 0, \sqrt{7}, \frac{2}{5}, -6.3, \sqrt{3}, -\frac{23}{34}\}$.

Liste los que sean

- a) naturales;
- b) enteros positivos y cero;
- c) racionales;
- d) irracionales; y
- e) reales.

- [1.8] 89. a) ¿A qué es igual $0/1$?

b) ¿Cómo nombramos una expresión como $1/0$?

- [1.9] 90. Dé el orden de operaciones a seguir cuando se evalúa una expresión matemática.

- [2.5] 91. Resuelva la ecuación $2(x + 3) + 2x = x + 4$.

- [3.1] 92. Evalúe $v = \frac{4}{3}\pi r^3$, si $r = 6$.

- [4.2] 93. Simplifique $\frac{x^7}{x^{-3}}$.

RESUMEN DEL CAPÍTULO			
Términos y frases importantes			
4.1 Base Exponente	4.3 Notación científica	4.4 Binomio Grado de un polinomio Grado de un término	Monomio Orden descendente Polinomio Trinomio

HECHOS IMPORTANTES	
--------------------	--

Reglas de los exponentes

1. $x^m x^n = x^{m+n}$	regla del producto
2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}, \quad x \neq 0$	regla del cociente
3. $x^0 = 1, \quad x \neq 0$	regla del exponente cero
4. $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$	regla de las potencias
5. $\left(\frac{ax}{by}\right)^m = \frac{a^m x^m}{b^m y^m}, \quad b \neq 0, y \neq 0$	regla de la potencia expandida
6. $x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad x \neq 0$	regla del exponente negativo
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m, \quad a \neq 0, b \neq 0$	regla de una fracción elevada a un exponente negativo

Producto de la suma y resta de dos términos iguales (binomios conjugados; también llamada diferencia de cuadrados):

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Método PIES para multiplicar dos binomios (Primeros, Internos, Externos, Segundos)

Cuadrado de un binomio

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Ejercicios de repaso del capítulo

[4.1] Simplificar.

- | | | | |
|----------------------------|-------------------------------------|--|--|
| 1. $x^5 \cdot x^2$ | 2. $x^2 \cdot x^4$ | 3. $3^2 \cdot 3^3$ | 4. $2^4 \cdot 2$ |
| 5. $\frac{x^4}{x}$ | 6. $\frac{a^5}{a^5}$ | 7. $\frac{5^5}{5^3}$ | 8. $\frac{2^5}{2}$ |
| 9. $\frac{x^6}{x^8}$ | 10. $\frac{y^4}{y}$ | 11. x^0 | 12. $4x^0$ |
| 13. $(3x)^0$ | 14. 6^0 | 15. $(5x)^2$ | 16. $(3a)^3$ |
| 17. $(6s)^3$ | 18. $(-3x)^3$ | 19. $(2x^2)^4$ | 20. $(-x^4)^6$ |
| 21. $(-m^4)^5$ | 22. $\left(\frac{2x^3}{y}\right)^2$ | 23. $\left(\frac{5y^2}{2b}\right)^2$ | 24. $6x^2 \cdot 4x^3$ |
| 25. $\frac{16x^2y}{4xy^2}$ | 26. $2x(3xy^3)^2$ | 27. $\left(\frac{9x^2y}{3xy}\right)^2$ | 28. $(2x^2y)^3(3xy^4)$ |
| 29. $4x^2y^3(2x^3y^4)^2$ | 30. $3c^2(2c^4d^3)$ | 31. $\left(\frac{8x^4y^3}{2xy^5}\right)^2$ | 32. $\left(\frac{21x^4y^3}{7y^2}\right)^3$ |

[4.2] Simplificar.

- | | | | |
|---------------------------------|------------------------------------|-----------------------------------|----------------------------------|
| 33. x^{-4} | 34. 3^{-3} | 35. 5^{-2} | 36. $\frac{1}{z^{-2}}$ |
| 37. $\frac{1}{x^{-7}}$ | 38. $\frac{1}{3^{-2}}$ | 39. $y^5 \cdot y^{-8}$ | 40. $x^{-2} \cdot x^{-3}$ |
| 41. $p^{-6} \cdot p^4$ | 42. $a^{-2} \cdot a^{-3}$ | 43. $\frac{x^3}{x^{-3}}$ | 44. $\frac{x^5}{x^{-2}}$ |
| 45. $\frac{x^{-3}}{x^3}$ | 46. $(3x^4)^{-2}$ | 47. $(4x^{-3}y)^{-3}$ | 48. $(-2m^{-3}n)^2$ |
| 49. $6y^{-2} \cdot 2y^4$ | 50. $(5y^{-3}z)^3$ | 51. $(4x^{-2}y^3)^{-2}$ | 52. $2x(3x^{-2})$ |
| 53. $(5x^{-2}y)(2x^4y)$ | 54. $4x^5(6x^{-7}y^2)$ | 55. $4y^{-2}(3x^2y)$ | 56. $\frac{6xy^4}{2xy^{-1}}$ |
| 57. $\frac{12x^{-2}y^3}{3xy^2}$ | 58. $\frac{49x^2y^{-3}}{7x^{-3}y}$ | 59. $\frac{36x^4y^7}{9x^5y^{-3}}$ | 60. $\frac{4x^8y^{-2}}{8x^7y^3}$ |

[4.3] Expresar cada número en notación científica.

- | | | |
|---------------|-----------|--------------|
| 61. 1,720,000 | 62. 0.153 | 63. 0.00763 |
| 64. 47,000 | 65. 4820 | 66. 0.000314 |

Expresar cada número sin exponentes.

- | | | |
|---------------------------|---------------------------|-------------------------|
| 67. 8.4×10^{-3} | 68. 6.52×10^{-4} | 69. 9.7×10^5 |
| 70. 4.38×10^{-6} | 71. 3.14×10^{-5} | 72. 1.103×10^7 |

Escriba cada una de las siguientes expresiones como una unidad base, sin prefijos métricos.

- | | |
|---------------------|----------------------|
| 73. 6 gigametros | 74. 92 mililitros |
| 75. 19.2 kilogramos | 76. 12.8 microgramos |

Realice cada una de las operaciones indicadas y escriba la respuesta sin exponentes.

- | | | |
|---|---|---|
| 77. $(2.5 \times 10^2)(3.4 \times 10^{-4})$ | 78. $(4.2 \times 10^{-3})(3 \times 10^5)$ | 79. $(3.5 \times 10^{-2})(7.0 \times 10^3)$ |
| 80. $\frac{7.94 \times 10^6}{2 \times 10^{-2}}$ | 81. $\frac{6.5 \times 10^4}{2.0 \times 10^6}$ | 82. $\frac{15 \times 10^{-3}}{5 \times 10^2}$ |

Convierta cada número a notación científica. Después haga los cálculos. Exprese la respuesta en notación científica.

83. $(14,000)(260,000)$

84. $(12,500)(400,000)$

85. $(0.00053)(40,000)$

86. $\frac{250}{500,000}$

87. $\frac{0.000068}{0.02}$

88. $\frac{850,000}{0.025}$

89. **Tanque de leche** Un tanque de leche contiene 6.4×10^6 onzas fluidas de leche. Si un galón es igual a 1.28×10^2 onzas fluidas, determine el número de galones de leche que contiene el tanque.



90. **Moneda en circulación** En 2001, en los Estados Unidos, el total de moneda circulante en billetes de \$10, era de $\$1.38 \times 10^{10}$, y el total de billetes de \$5 en circulación era de $\$8.54 \times 10^9$.

- a) ¿Qué tanto más había en circulación en billetes de \$10 que de \$5? Escriba la respuesta sin exponentes.
- b) ¿Cuántas veces es mayor la cantidad en circulación en billetes de \$10 que de \$5?

[4.4] Indique si la expresión es un polinomio. Si el polinomio tiene un nombre específico, dígallo. Si el polinomio no está escrito en orden descendente, reescribalo en dicho orden. Mencione el grado de cada polinomio.

91. $x^{-4} - 8$

92. -2

93. $x^2 - 4 + 3x$

94. $-3 - x + 4x^2$

95. $13x^3 - 4$

96. $4x^{1/2} - 6$

97. $x - 4x^2$

98. $x^3 + x^{-2} + 3$

99. $2x^3 - 7 + 4x^2 - 3x$

[4.4–4.6] Realice cada una de las operaciones indicadas.

100. $(x - 5) + (2x + 4)$

101. $(2d - 3) + (5d + 7)$

102. $(-x - 10) + (-2x + 5)$

103. $(-x^2 + 6x - 7) + (-2x^2 + 4x - 8)$

104. $(-m^2 + 5m - 8) + (6m^2 - 5m - 2)$

105. $(6.2p - 4.3) + (1.9p + 7.1)$

106. $(-4x + 8) - (-2x + 6)$

107. $(4x^2 - 9x) - (3x + 15)$

108. $(5a^2 - 6a - 9) - (2a^2 - a + 12)$

109. $(-2x^2 + 8x - 7) - (3x^2 + 12)$

110. $(x^2 + 7x - 3) - (x^2 + 3x - 5)$

111. $\frac{1}{7}x(21x + 21)$

112. $-3x(5x + 4)$

113. $3x(2x^2 - 4x + 7)$

114. $-c(2c^2 - 3c + 5)$

115. $-4z(-3z^2 - 2z - 8)$

116. $(x + 4)(x + 5)$

117. $(3x + 6)(-4x + 1)$

118. $(-2x + 6)^2$

119. $(6 - 2x)(2 + 3x)$

120. $(r + 5)(r - 5)$

121. $(3x + 1)(x^2 + 2x + 4)$

122. $(x - 1)(3x^2 + 4x - 6)$

123. $(-4x + 2)(3x^2 - x + 7)$

124. $\frac{2x + 4}{2}$

125. $\frac{10x + 12}{2}$

126. $\frac{8x^2 + 4x}{x}$

127. $\frac{6x^2 + 9x - 4}{3}$

128. $\frac{6w^2 - 5w + 3}{3w}$

129. $\frac{8x^5 - 4x^4 + 3x^2 - 2}{2x}$

130. $\frac{8m - 4}{-2}$

131. $\frac{5x^2 - 6x + 15}{3x}$

132. $\frac{5x^3 + 10x + 2}{2x^2}$

$$133. \frac{x^2 + x - 12}{x - 3}$$

$$136. \frac{4x^3 + 12x^2 + x - 12}{2x + 3}$$

$$134. \frac{6n^2 + 19n + 3}{6n + 1}$$

$$137. \frac{4x^2 - 12x + 9}{2x - 3}$$

$$135. \frac{5x^2 + 28x - 10}{x + 6}$$

Examen de práctica del capítulo

Simplifique cada expresión.

1. $5x^4 \cdot 3x^2$

2. $(3xy^2)^3$

3. $\frac{12d^5}{4d}$

4. $\left(\frac{3x^2y}{6xy^3}\right)^3$

5. $(2x^3y^{-2})^{-2}$

6. $\frac{30x^6y^2}{45x^{-1}y}$

7. $(4x^0)(3x^2)^0$

Convierta cada número a notación científica y después determine la respuesta. Exprese ésta en notación científica.

8. $(175,000)(30,000)$

9. $\frac{0.0008}{4000}$

Determine si cada expresión es un polinomio. Si el polinomio tiene un nombre específico, diga cuál es.

10. $4x$

11. $3b + 2$

12. $x^{-2} + 4$

13. Escriba el polinomio $-5 + 6x^3 - 2x^2 + 5x$ en orden descendente y diga de qué grado es.

En los ejercicios 14 a 24, realice cada una de las operaciones indicadas.

14. $(6x - 4) + (2x^2 - 5x - 3)$

16. $(4x^2 - 5) - (x^2 + x - 8)$

18. $(4x + 7)(2x - 3)$

20. $(3x - 5)(2x^2 + 4x - 5)$

22. $\frac{-12x^2 - 6x + 5}{-3x}$

24. $\frac{12x^2 + 7x - 12}{4x + 5}$

15. $(x^2 - 4x + 7) - (3x^2 - 8x + 7)$

17. $-5d(-3d + 8)$

19. $(9 - 4c)(5 + 3c)$

21. $\frac{16x^2 + 8x - 4}{4}$

23. $\frac{8x^2 - 2x - 15}{2x - 3}$

25. **Vida media** La vida media de un elemento radiactivo es el tiempo necesario para que decaiga la mitad de su radioactividad. La vida media del carbono 14 (C^{14}) es de 5730 años. La vida media del uranio 238 (U^{238}) es 4.46×10^9 años.

- Escriba la vida media del C^{14} en notación científica.
- ¿Cuántas veces es mayor la vida media del U^{238} que la del C^{14} ?



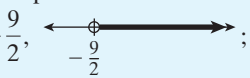
Examen de repaso acumulativo

Resuelva el siguiente examen y compruebe las respuestas con las que aparecen al final. Repase cualesquiera preguntas que haya respondido en forma incorrecta. La sección y el objetivo en que estudiamos el material se indica después de la respuesta.

1. Evalúe $12 + 8 \div 2^2 + 3$.
2. Simplifique $7 - (2x - 3) + 2x - 8(1 - x)$.
3. Evalúe $-4x^2 + x - 7$ si $x = -2$.
4. Diga el nombre de cada propiedad indicada.
 - a) $(5 + 2) + 7 = 5 + (2 + 7)$.
 - b) $7 \cdot x = x \cdot 7$.
 - c) $2(y + 9) = (y + 9)2$.
5. Resuelva la ecuación $3x + 5 = 4(x - 2)$.
6. Resuelva la ecuación $3(x + 2) + 3x - 5 = 4x + 1$.
7. Resuelva la desigualdad $3x - 11 < 5x - 2$ y grafique la solución en una recta numérica.
8. Despeje y de la ecuación $3x - 2 = y - 7$.
9. Despeje y de la ecuación $7x - 3y = 21$, después encuentre el valor de y cuando $x = 6$.
10. Simplifique la expresión $(2x^4y^3)^3(5x^2y)$.
11. Escriba el polinomio $-5x + 2 - 7x^2$ en orden descendente y diga de qué grado es.
12. $(x^2 + 4x - 3) + (2x^2 + 5x + 1)$.
13. $(6a^2 + 3a + 2) - (a^2 - 3a - 3)$.
14. $(3y - 5)(2y + 3)$.
15. $(2x - 1)(3x^2 - 5x + 2)$.
16. $\frac{10d^2 + 12d - 8}{4d}$.
17. $\frac{6x^2 + 11x - 10}{3x - 2}$.
18. **Sopa de pollo** En la tienda de abarrotes LeAnn's, tres latas de sopa de pollo cuestan \$1.25. Calcule el costo de 8 latas.
19. **Rectángulo** La longitud de un rectángulo es 2 menos que el triple del ancho. Encuentre las dimensiones del rectángulo si su perímetro es de 28 pies.
20. **Velocidad promedio** Bob Dolan maneja de Jackson, Mississippi, a Tallulah, Louisiana, una distancia de 60 millas. Al mismo tiempo, Nick Reide comienza a manejar de Tallulah a Jackson, por la misma carretera. Si Bob y Nick se encuentran después de 0.5 horas y la velocidad promedio de Nick fue de 7 millas por hora más que la de Bob, calcule la velocidad promedio de cada automóvil.

Ejecute cada una de las operaciones indicadas.

Respuestas al examen de repaso acumulativo

1. 17; [Sec. 1.9, Obj. 5] 2. $8x + 2$; [Sec. 2.1, Obj. 6] 3. -25; [Sec. 1.9, Obj. 6] 4. a) Propiedad asociativa de la adición; [Sec. 1.10, Obj. 2] b) Propiedad conmutativa de la multiplicación; [Sec. 1.10, Obj. 1] c) Propiedad conmutativa de la multiplicación; [Sec. 1.10, Obj. 1] 5. 13; [Sec. 2.5, Obj. 1] 6. 0; [Sec. 2.5, Obj. 1] 7. $x > -\frac{9}{2}$, ; [Sec. 2.7, Obj. 1] 8. $y = 3x + 5$; [Sec. 3.1, Obj. 3] 9. $y = \frac{7x - 21}{3}$, 7; [Sec. 3.1, Obj. 3] 10. $40x^{14}y^{10}$; [Sec. 4.1, Obj. 3] 11. $-7x^2 - 5x + 2$, segundo; [Sec. 4.4, Obj. 1] 12. $3x^2 + 9x - 2$; [Sec. 4.4, Obj. 2] 13. $5a^2 + 6a + 5$; [Sec. 4.4, Obj. 3] 14. $6y^2 - y - 15$; [Sec. 4.5, Obj. 4] 15. $6x^3 - 13x^2 + 9x - 2$; [Sec. 4.5, Obj. 6] 16. $\frac{5}{2}d + 3 - \frac{2}{d}$; [Sec. 4.6, Obj. 1] 17. $2x + 5$; [Sec. 4.6, Obj. 2] 18. \$3.33; [Sec. 2.6, Obj. 3] 19. $l = 10$ pies, $a = 4$ pies; [Sec. 3.4, Obj. 1] 20. Bob, 56.5 mph; Nick, 63.5 mph; [Sec. 3.5, Obj. 2]

Capítulo 6

Expresiones racionales y ecuaciones



- 6.1** Simplificación de expresiones racionales
- 6.2** Multiplicación y división de expresiones racionales
- 6.3** Suma y resta de expresiones racionales con denominador común y determinación del mínimo común denominador
- 6.4** Suma y resta de expresiones racionales
- 6.5** Fracciones complejas
- 6.6** Solución de ecuaciones racionales
- 6.7** Ecuaciones racionales: aplicaciones y solución de problemas
- 6.8** Variación

Resumen del capítulo
Ejercicios de repaso del capítulo
Examen de práctica del capítulo
Examen de repaso acumulativo

Los avances tecnológicos en la transportación durante los últimos 50 años han cambiado la forma de viajar de las personas, y han reducido de manera significativa la duración de los viajes. En Japón, los usuarios del tren se han beneficiado del comité para trenes de alta velocidad del país. En el ejercicio 24 de la página 424, utilizamos una ecuación racional para determinar la distancia entre dos ciudades comparando el tiempo que hace un viajero en los nuevos trenes bala de Japón, con el tiempo que habría hecho en uno de los viejos trenes.



Avance de la lección

Cuando estudió las fracciones, en aritmética, trabajó con números racionales. Ahora ampliará sus conocimientos incluyendo las fracciones que contienen variables y que se conocen como expresiones racionales. En las secciones 6.1 a 6.5 empleará los mismos procedimientos básicos que utilizó para simplificar (o reducir), sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones aritméticas, esta vez para las expresiones racionales. Es conveniente que revise la sección 1.3, ya que el material presentado en este capítulo se examinará a partir de los procedimientos que se presentaron allí.

Muchos problemas de la vida real incluyen ecuaciones que tienen expresiones racionales, a las cuales se les denomina ecuaciones racionales. En la sección 6.6 resolveremos ecuaciones, y en las secciones 6.6 a 6.8 veremos aplicaciones reales de ecuaciones racionales, incluyendo el uso de algunas fórmulas comunes.

Para tener éxito en este capítulo necesita comprender completamente la factorización, la cual se presentó en el capítulo 5. Las secciones 5.3 y 5.4 son especialmente importantes..

6.1 SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES



- 1 Determinar los valores para los que está definida una expresión racional.
- 2 Entender los tres signos de una fracción.
- 3 Simplificar expresiones racionales.
- 4 Factorizar un 1 negativo en un polinomio.

1 Determinar los valores para los que está definida una expresión racional

Iniciamos este capítulo definiendo una *expresión racional*.

Una **expresión racional** es una expresión de la forma p/q , donde p y q son polinomios y $q \neq 0$.

Ejemplos de expresiones racionales

$$\frac{4}{5}, \quad \frac{x-6}{x}, \quad \frac{x^2+2x}{x-3}, \quad \frac{a}{a^2-4}$$

El denominador de una expresión racional no puede ser igual a 0, ya que la división entre 0 no está definida. En la expresión $\frac{x+3}{x}$, el valor de x no puede ser 0, ya que el denominador tendría un valor 0. Decimos que la expresión $\frac{x+3}{x}$ está *definida* para todos los números reales excepto 0. *No está definida* cuando x es 0.

En $\frac{x^2+4x}{x-3}$, el valor de x no puede ser 3, ya que el denominador tendría un valor 0. ¿Qué valores de x no pueden utilizarse en la expresión $\frac{x}{x^2-4}$? Si respondió 2

y -2, contestó correctamente. **Siempre que tengamos una expresión racional con una variable en el denominador, supondremos hemos excluido el valor o valores de la variable que hacen al denominador igual a cero.**

Un método para determinar el valor o los valores de la variable que se excluyen consiste en igualar el denominador y después despejar a la variable de la ecuación resultante.

EJEMPLO 1 Determinemos el valor o los valores de la variable para los que está definida la expresión racional. a) $\frac{1}{x-4}$ b) $\frac{x+1}{2x-7}$ c) $\frac{x+3}{x^2+6x-7}$

Solución

a) Necesitamos determinar el valor o los valores de x que hacen a $x - 4$ igual a 0 y excluirlos. Analizando el denominador podemos ver que cuando $x = 4$, el denominador es $4 - 4$ o 0. Así, no tomamos en cuenta a $x = 4$ cuando consideremos la expresión racional $\frac{1}{x - 4}$. Esta expresión está definida para todos los números reales, excepto 4. En ocasiones simplificamos nuestra respuesta y escribimos $x \neq 4$.

b) Necesitamos determinar el valor o los valores de x que hacen a $2x - 7$ igual a 0 y excluir estos valores. Podemos hacer esto, haciendo $2x - 7$ igual a 0 y despejar a x en esta ecuación.

$$2x - 7 = 0$$

$$2x = 7$$

$$x = \frac{7}{2}$$

Por tanto, no tomamos en cuenta $x = \frac{7}{2}$ cuando consideremos a la expresión racional $\frac{x + 1}{2x - 7}$. Esta expresión está definida para todos los números reales excepto $x = \frac{7}{2}$. En ocasiones abreviamos nuestra respuesta y escribimos $x \neq \frac{7}{2}$.

c) Para determinar el valor o los valores que se excluyen, hacemos al denominador igual a cero y resolvemos la ecuación.

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$

$$(x + 7)(x - 1) = 0$$

$$\begin{array}{ll} x + 7 = 0 & \text{o bien} \quad x - 1 = 0 \\ x = -7 & \quad \quad \quad x = 1 \end{array}$$

Por tanto, no tomamos en cuenta los valores $x = -7$ o $x = 1$ cuando consideremos la expresión racional $\frac{x + 3}{x^2 + 6x + 7}$. Tanto $x = -7$ como $x = 1$ hacen que el denominador sea igual a cero. Esta expresión está definida para todos los números reales, excepto $x = -7$ y $x = 1$. Por tanto, $x \neq -7$ y $x \neq 1$. 

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 15**

2 Entender los tres signos de una fracción

Toda fracción tiene asociados tres **signos**: el del numerador, el del denominador y el de la propia fracción.

$$\begin{array}{c} \text{Signo del numerador} \downarrow \\ \text{Signo de la fracción} \rightarrow + \frac{-a}{+b} \\ \uparrow \text{Signo del denominador} \end{array}$$

Siempre que omita cualquiera de los signos, supondremos que es positivo. Por ejemplo,

$$\begin{array}{ll} \frac{a}{b} & \text{significa} \quad + \frac{+a}{+b} \\ \frac{-a}{b} & \text{significa} \quad + \frac{-a}{+b} \\ -\frac{a}{b} & \text{significa} \quad - \frac{+a}{+b} \end{array}$$

Al cambiar dos de los tres signos de una fracción no se cambia el valor de la fracción. Así,

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b}$$

Por lo general, no escribimos una fracción con un denominador negativo. Por ejemplo, la expresión $\frac{2}{-5}$ se escribiría como $\frac{-2}{5}$ o como $-\frac{2}{5}$. La expresión $\frac{x}{-(4-x)}$ puede escribirse $\frac{x}{x-4}$ ya que $-(4-x) = -4+x$ o $x-4$.

3 Simplificar expresiones racionales

Una expresión racional está **simplificada** o **reducida a su mínima expresión** cuando el numerador y el denominador no tienen factores comunes distintos de 1. La fracción $\frac{9}{12}$ no está simplificada, ya que 9 y 12 tienen como factor común el número 3. Cuando se factoriza el número 3, la fracción simplificada es $\frac{3}{4}$.

$$\frac{9}{12} = \frac{\cancel{3} \cdot 3}{\cancel{3} \cdot 4} = \frac{3}{4}$$

La expresión racional $\frac{ab-b^2}{2b}$ no está simplificada, ya que el numerador y el denominador tienen el factor común b . Para simplificar esta expresión, factorice b en cada término del numerador; luego divida entre b .

$$\frac{ab-b^2}{2b} = \frac{\cancel{b}(a-b)}{2\cancel{b}} = \frac{a-b}{2}$$

Así, $\frac{ab-b^2}{2b}$ se convierte en $\frac{a-b}{2}$ cuando se simplifica.

Para simplificar expresiones racionales

1. Factorice el numerador y el denominador tanto como sea posible.
2. Divida el denominador y el numerador entre los factores comunes.

EJEMPLO 2 Simplifique $\frac{5x^3 + 10x^2 - 25x}{10x^2}$.

Solución Factorice el máximo factor común, $5x$, de cada término en el numerador. Como $5x$ es un factor común tanto del numerador como del denominador, divida entre él.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 33

$$\frac{5x^3 + 10x^2 - 25x}{10x^2} = \frac{\cancel{5x}(x^2 + 2x - 5)}{\cancel{5x} \cdot 2x} = \frac{x^2 + 2x - 5}{2x}$$



SUGERENCIA

En el ejemplo 2, estamos *simplificando* un polinomio dividido entre un monomio usando factorización. En la sección 4.6 *dividimos* polinomios entre monomios escribiendo cada término en el numerador entre la expresión en el denominador. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\frac{5x^3 + 10x^2 - 25x}{10x^2} &= \frac{5x^3}{10x^2} + \frac{10x^2}{10x^2} - \frac{25x}{10x^2} \\ &= \frac{x}{2} + 1 - \frac{5}{2x}\end{aligned}$$

La respuesta anterior, $\frac{x}{2} + 1 - \frac{5}{2x}$, es equivalente a la obtenida al factorizar en el ejemplo 2, $\frac{x^2 + 2x - 5}{2x}$, como se muestra a continuación.

$$\begin{aligned}&\frac{x}{2} + 1 - \frac{5}{2x} \\ &= \frac{x}{x} \cdot \frac{x}{2} + \frac{2x}{2x} - \frac{5}{2x} \quad \text{Escriba cada término con el mcd } 2x. \\ &= \frac{x^2}{2x} + \frac{2x}{2x} - \frac{5}{2x} \\ &= \frac{x^2 + 2x - 5}{2x}\end{aligned}$$

Cuando se pidió *simplificar* una expresión factorizamos los numeradores y los denominadores, tanto como sea posible, luego dividimos entre los factores comunes. Este proceso se ilustró en el ejemplo 2 y se mostrará en los ejemplos 3 a 5.

EJEMPLO 3 Simplifique $\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3}$.

Solución Factorice el numerador; luego divida entre el factor común.

$$\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} = \frac{(x+3)(x-1)}{x+3} = x - 1$$



EJEMPLO 4 Simplifique $\frac{r^2 - 25}{r - 5}$.

Solución Factorice el numerador; luego divida entre los factores comunes.

$$\frac{r^2 - 25}{r - 5} = \frac{(r+5)(r-5)}{r-5} = r + 5$$



EJEMPLO 5 Simplifique $\frac{3x^2 - 10x - 8}{x^2 + 3x - 28}$.

Solución Factorice el numerador; y el denominador; luego divida entre los factores comunes.

$$\frac{3x^2 - 10x - 8}{x^2 + 3x - 28} = \frac{(3x+2)(x-4)}{(x+7)(x-4)} = \frac{3x+2}{x+7}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 41**

Observe que $\frac{3x+2}{x+7}$ no puede simplificarse más.



CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Recuerde: al dividir expresiones sólo se pueden eliminar *factores* comunes.

CORRECTO

$$\frac{\overset{5}{20} \overset{x}{x^2}}{\underset{1}{4} \underset{1}{x}} = 5x$$

INCORRECTO

$$\frac{\overset{x^2}{x^2} - \overset{5}{20}}{\underset{x}{x} - \underset{4}{4}}$$

En el denominador del ejemplo a la izquierda, $4x$, el 4 y la x son factores, ya que están *multiplicándose*. El 4 y la x también son factores del numerador $20x^2$, que puede escribirse como $4 \cdot x \cdot 5x$.

Algunos estudiantes dividen términos de manera incorrecta. En la expresión $\frac{x^2 - 20}{x - 4}$, la x y -4 son *términos* del denominador, no son factores, y por tanto no pueden dividirse.

4 Factorizar un 1 negativo en un polinomio

Recuerde que al factorizar -1 de un polinomio, cambia el signo de cada término de éste.

Ejemplos

$$-3x + 7 = -1(3x - 7) = -(3x - 7)$$

$$5 - 2x = -1(-5 + 2x) = -(2x - 5)$$

$$-2x^2 + 3x - 4 = -1(2x^2 - 3x + 4) = -(2x^2 - 3x + 4)$$

Siempre que los términos del numerador y del denominador difieran sólo por sus signos (uno es el opuesto o inverso aditivo del otro), podemos factorizar -1 en el numerador o en el denominador (no en ambos) y luego dividir entre el factor común. Este procedimiento se ilustra en el ejemplo 6.

EJEMPLO 6 Simplifique $\frac{3x - 7}{7 - 3x}$.

Solución

Como cada término en el numerador sólo difiere en el signo de su término semejante en el denominador, factorizaremos -1 en cada término del denominador.

$$\begin{aligned} \frac{3x - 7}{7 - 3x} &= \frac{3x - 7}{-1(-7 + 3x)} \\ &= \frac{\cancel{3x} - \cancel{7}}{-\cancel{(3x - 7)}} \\ &= -1 \end{aligned}$$



SUGERENCIA

En el ejemplo 6 determinamos que $\frac{3x - 7}{7 - 3x} = -1$. Observe que el numerador, $3x - 7$, y el denominador, $7 - 3x$, son opuestos ya que sólo difieren en el signo. Esto es,

$$\frac{3x - 7}{7 - 3x} = \frac{3x - 7}{-(3x - 7)} = -1$$

Siempre que tengamos el cociente de dos expresiones que son opuestas, como $\frac{a - b}{b - a}$, $a \neq b$, el cociente puede remplazarse por -1 .

En el ejemplo 7 utilizaremos la Sugerencia dada en la página anterior.

EJEMPLO 7 Simplifique $\frac{4n^2 - 23n - 6}{6 - n}$.

Solución

$$\frac{4n^2 - 23n - 6}{6 - n} = \frac{(4n + 1)(n - 6)}{6 - n}$$

Los términos en $n - 6$ sólo difieren en el signo de los términos en $6 - n$.

$$= (4n + 1)(-1)$$

Reemplace $\frac{n - 6}{6 - n}$ con -1 .

$$= -(4n + 1)$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 49**

Observe que $-4n - 1$ también es una respuesta aceptable.



Conjunto de ejercicios 6.1

Ejercicios conceptuales

1. **a)** Con sus propias palabras defina una expresión racional.
b) Proporcione tres ejemplos de expresiones racionales.
2. Explique cómo determinar el valor o los valores de la variable que hacen que una expresión racional no esté definida.
3. En cualquier expresión racional con una variable en el denominador, ¿qué es lo que siempre suponemos acerca de la variable?
4. Con sus propias palabras, explique cómo simplificar una expresión racional.

Explique por qué las siguientes expresiones no pueden simplificarse.

5. $\frac{2 + 3x}{4}$

6. $\frac{5x + 4y}{12xy}$

Explique por qué x puede representar cualquier número real en las siguientes expresiones.

7. $\frac{x - 6}{x^2 + 2}$

8. $\frac{x + 3}{x^2 + 4}$

En los ejercicios 9 y 10, determine los valores (si los hay), que x no puede representar. Explique.

9. $\frac{x + 3}{x - 2}$

10. $\frac{x}{(x - 4)^2}$

11. ¿La expresión $-\frac{x + 5}{5 - x}$ es igual a -1 ? Explique.

12. ¿La expresión $-\frac{3x + 2}{-3x - 2}$ es igual a 1 ? Explique.

Práctica de habilidades

Determine el valor o valores de la variable en donde cada expresión está definida.

13. $\frac{x - 3}{x}$

14. $\frac{3}{r + 4}$

15. $\frac{7}{4n - 12}$

16. $\frac{5}{2x - 3}$

17. $\frac{x + 4}{x^2 - 4}$

18. $\frac{7}{x^2 + 4x - 5}$

19. $\frac{x-3}{2x^2-9x+9}$

21. $\frac{x}{x^2+16}$

23. $\frac{p+4}{4p^2-25}$

20. $\frac{x^2+3}{2x^2-13x+15}$

22. $\frac{6}{9+x^2}$

24. $\frac{3}{9r^2-16}$

Simplifique las expresiones racionales siguientes que tienen un monomio dividido entre otro monomio. Este material se estudió en las secciones 4.1 y 4.2, y le ayudarán a prepararse para la siguiente sección.

25. $\frac{7x^3y}{21x^2y^5}$

26. $\frac{24x^3y^2}{30x^4y^5}$

27. $\frac{(2a^4b^5)^3}{2a^{12}b^{20}}$

28. $\frac{(4r^2s^3)^2}{(3r^4s)^3}$

Simplifique

29. $\frac{x}{x+xy}$

32. $\frac{3x^2+6x}{3x^2+9x}$

35. $\frac{r^2-r-2}{r+1}$

38. $\frac{x^2+3x-18}{3x-9}$

41. $\frac{x^2-2x-3}{x^2-x-6}$

44. $\frac{8a-6}{3-4a}$

47. $\frac{x^2+3x-18}{-2x^2+6x}$

50. $\frac{x^2-25}{x^2-3x-10}$

53. $\frac{x^2-25}{(x+5)^2}$

56. $\frac{6t^2-7t-5}{2t+1}$

59. $\frac{2x^2-8x+3x-12}{2x^2+8x+3x+12}$

62. $\frac{x^3-125}{x^2-25}$

65. $\frac{4x+6y}{2x^2+xy-3y^2}$

30. $\frac{3x}{3x+9}$

33. $\frac{x^3+6x^2+3x}{2x}$

36. $\frac{b-2}{b^2-8b+12}$

39. $\frac{k^2-6k+9}{k^2-9}$

42. $\frac{4x^2-12x-40}{2x^2-16x+30}$

45. $\frac{x^2-2x-8}{4-x}$

48. $\frac{3p^2-13p-10}{p-5}$

51. $\frac{m-2}{4m^2-13m+10}$

54. $\frac{16x^2+24x+9}{4x+3}$

57. $\frac{x^2-3x+4x-12}{x-3}$

60. $\frac{x^3+1}{x^2-x+1}$

63. $\frac{9s^2-16t^2}{3s-4t}$

66. $\frac{3k^2+6kr-9r^2}{k^2+5kr+6r^2}$

31. $\frac{5x+15}{x+3}$

34. $\frac{x^2y^2-2xy+3y}{y}$

37. $\frac{x^2+2x}{x^2+4x+4}$

40. $\frac{z^2-10z+25}{z^2-25}$

43. $\frac{2x-3}{3-2x}$

46. $\frac{7-s}{s^2-12s+35}$

49. $\frac{2x^2+5x-3}{1-2x}$

52. $\frac{2x^2-11x+15}{(x-3)^2}$

55. $\frac{6x^2-13x+6}{3x-2}$

58. $\frac{x^2-2x+4x-8}{2x^2+3x+8x+12}$

61. $\frac{a^3-8}{a-2}$

64. $\frac{a+4b}{a^2-16b^2}$

Solución de problemas

Simplifique, si es posible, las siguientes expresiones. Trate el símbolo desconocido como si fuese una variable.

67. $\frac{3\odot}{12}$

68. $\frac{\odot}{\odot + 7\odot^2}$

69. $\frac{7\Delta}{14\Delta+21}$

70. $\frac{\Delta^2+2\Delta}{\Delta^2+4\Delta+4}$

71. $\frac{3\Delta-2}{2-3\Delta}$

72. $\frac{(\Delta-3)^2}{\Delta^2-6\Delta+9}$

Determine el denominador que hace verdadera cada proposición. Explique cómo obtuvo su respuesta.

73. $\frac{x^2 - x - 6}{\square} = x - 3$

74. $\frac{2x^2 + 11x + 12}{\square} = x + 4$

Determine el numerador que hace verdadera cada proposición. Explique cómo obtuvo su respuesta.

75. $\frac{\square}{x + 4} = x + 3$

76. $\frac{\square}{x - 5} = 2x - 1$

Problemas de reto

En los ejercicios 77 al 79, **a)** determine el valor o valores que x no puede representar. **b)** Simplifique la expresión.

77. $\frac{x + 3}{x^2 - 2x + 3x - 6}$

78. $\frac{x - 4}{2x^2 - 5x - 8x + 20}$

79. $\frac{x + 5}{2x^3 + 7x^2 - 15x}$

Simplifique. Explique cómo determinó su respuesta.

80. $\frac{\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4}{x^4}$

81. $\frac{\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4}{\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4}$

82. $\frac{\frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^4}{\frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{5}x^5}$

Actividad en grupo

En grupo, analice y responda el ejercicio 83.

83. **a)** Como grupo, determinen los valores de la variable en donde la expresión $\frac{x^2 - 25}{x^3 + 2x^2 - 15x}$ no está definida.
- b)** Como grupo, simplifiquen la expresión racional.
- c)** Miembro 1 del grupo: sustituya 6 en la *expresión original* y evalúe.
- d)** Miembro 2 del grupo: sustituya 6 en la *expresión simplificada* de la parte **b)** y compare su resultado con el del miembro 1 del grupo.

- e)** Miembro 3 del grupo: sustituya -2 en la expresión original y en la expresión simplificada en la parte **b)**. Compare sus respuestas.
- f)** Como grupo, analicen los resultados del trabajo de las partes **c)** a **e)**.
- g)** Ahora, en grupo, sustituyan -5 en la expresión original y en la expresión simplificada. Analicen sus resultados.
- h)** ¿La expresión $\frac{x^2 - 25}{x^3 + 2x^2 - 15x}$ siempre es igual a su forma simplificada, para *cualquier* valor de x ? Explique su respuesta.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.1] 84. Despeje y de la fórmula $z = \frac{x - y}{2}$.

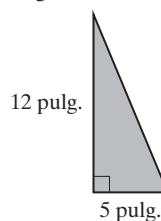
- [3.4] 85. **Triángulo** Determine las medidas de los tres lados de un triángulo, si un ángulo es 30° mayor que el ángulo más pequeño, y el tercer ángulo es 10° mayor que 3 veces el ángulo más pequeño.

[4.1] 86. Simplifique $\left(\frac{4x^2y^2}{9x^4y^3}\right)^2$.

[4.4] 87. Reste $3x^2 - 4x - 8 - (-3x^2 + 6x + 9)$.

[5.3] 88. Factorice completamente $3a^2 - 30a + 72$.

- [5.7] 89. Determine la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo.



6.2 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE EXPRESIONES RACIONALES



- 1 Multiplicación de expresiones racionales.
- 2 División de expresiones racionales.

1 Multiplicación de expresiones racionales

En la sección 1.3 revisamos la multiplicación de fracciones numéricas. Recuerde que para multiplicar dos fracciones debemos multiplicar tanto sus numeradores como sus denominadores.

Para multiplicar dos fracciones

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad b \neq 0 \quad y \quad d \neq 0$$

EJEMPLO 1 Multiplique $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-2}{9}\right)$.

Solución Primero divida entre los factores comunes; luego multiplique.

$$\frac{\overset{1}{\cancel{3}}}{5} \cdot \frac{-2}{\underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{1 \cdot (-2)}{5 \cdot 3} = -\frac{2}{15}$$



El mismo principio se aplica cuando multiplicamos expresiones racionales que tienen variables. Antes de multiplicar, primero debemos dividir entre los factores comunes del numerador y el denominador.

Para multiplicar expresiones racionales

1. Factorice por completo todos los numeradores y los denominadores.
2. Divida entre los factores comunes.
3. Multiplique los numeradores por los numeradores y los denominadores por los denominadores.

EJEMPLO 2 Multiplique $\frac{3x^2}{2y} \cdot \frac{4y^3}{3x}$.

Solución Este problema puede representarse como

$$\begin{array}{r} \frac{3xx}{2y} \cdot \frac{4yyy}{3x} \\ \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{x}}x}{2y} \cdot \frac{4\overset{1}{\cancel{y}}\overset{1}{\cancel{y}}\overset{1}{\cancel{y}}}{\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{x}}} \quad \text{Divida entre los 3 y entre las } x. \\ \frac{\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{x}}x}{\underset{1}{2}\underset{1}{y}} \cdot \frac{\overset{2}{4}\overset{1}{\cancel{y}}\overset{1}{\cancel{y}}}{\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{x}}} \quad \text{Divida el 4 y el 2 entre 2 y divida las } y. \\ \frac{\underset{1}{2}\underset{1}{x}}{1} \cdot \frac{\overset{2}{4}\overset{1}{\cancel{y}}}{\overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{x}}} \end{array}$$

Ahora multiplique entre sí los numeradores que quedan; haga lo mismo con los denominadores.

$$\frac{2xy^2}{1} \quad \text{o bien} \quad 2xy^2$$



En lugar de ilustrar completamente este proceso cuando se multiplican expresiones racionales, con frecuencia procedemos como sigue:

$$\frac{3x^2}{2y} \cdot \frac{4y^3}{3x}$$

$$= \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \overset{x}{x^{\cancel{2}}} \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \overset{y^2}{y^{\cancel{3}}}}{\underset{1}{\cancel{2}} \underset{1}{\cancel{y}} \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \underset{1}{\cancel{x}}} = 2xy^2$$

EJEMPLO 3 Multiplique $-\frac{3y^2}{2x^3} \cdot \frac{5x^2}{7y^2}$.

Solución
AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 43

$$-\frac{3\overset{2}{y^{\cancel{2}}}}{2\overset{x}{x^{\cancel{3}}}} \cdot \frac{5\overset{x^2}{x^{\cancel{2}}}}{7\overset{y^2}{y^{\cancel{2}}}} = -\frac{15}{14x}$$



En el ejemplo 3, cuando se dividió y^2 en el numerador y el denominador no colocamos un 1 arriba y abajo de los factores de y^2 . Cuando se factoriza en el denominador y en el numerador un factor, por lo común no se muestran los “unos”.

EJEMPLO 4 Multiplique $(x - 6) \cdot \frac{5}{x^3 - 6x^2}$.

Solución

$$(x - 6) \cdot \frac{5}{x^3 - 6x^2} = \frac{\overset{x}{\cancel{x}} \overset{6}{\cancel{6}}}{1} \cdot \frac{5}{x^2(\overset{x}{\cancel{x}} \overset{6}{\cancel{6}})} = \frac{5}{x^2}$$



EJEMPLO 5 Multiplique $\frac{(x + 2)^2}{6x^2} \cdot \frac{3x}{x^2 - 4}$.

Solución

$$\frac{(x + 2)^2}{6x^2} \cdot \frac{3x}{x^2 - 4} = \frac{(x + 2)(x + 2)}{6x^2} \cdot \frac{3x}{(x + 2)(x - 2)}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 15

$$= \frac{(\overset{x}{\cancel{x}} \overset{2}{\cancel{2}})(x + 2)}{\underset{2}{\cancel{6}} \underset{x}{x^{\cancel{2}}}} \cdot \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \overset{1}{\cancel{x}}}{(\overset{x}{\cancel{x}} \overset{2}{\cancel{2}})(x - 2)} = \frac{x + 2}{2x(x - 2)}$$



En el ejemplo 5 podríamos haber multiplicado los factores en el denominador para obtener $\frac{x + 2}{2x^2 - 4x}$. Ésta es también una respuesta correcta. En esta sección

dejaremos las respuestas racionales con el numerador como un polinomio (en forma no factorizada) y los denominadores en forma factorizada, como se dio en el ejemplo 5. Esto es consistente con la forma como dejaremos respuestas racionales cuando sumemos y restemos expresiones racionales en secciones posteriores.

EJEMPLO 6 Multiplique $\frac{a - 4}{3a} \cdot \frac{6a}{4 - a}$.

Solución

$$\frac{a - 4}{\overset{3}{\cancel{3}} \overset{a}{\cancel{a}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{6}} \overset{a}{\cancel{a}}}{4 - a} = \frac{2(a - 4)}{4 - a}$$

Este problema aún no está completo. En la sección 6.1 mostramos que $4 - a$ es $-1(-4 + a)$ o bien $-1(a - 4)$. Por tanto,

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 13

$$\frac{2(a - 4)}{4 - a} = \frac{2(\overset{a}{\cancel{a}} \overset{4}{\cancel{4}})}{-1(\overset{a}{\cancel{a}} \overset{4}{\cancel{4}})} = -2$$



SUGERENCIA

Cuando en un problema de multiplicación, un numerador y un denominador sólo difieren en el signo, factorice -1 de cualquiera de ellos, y luego divida entre el factor común.

$$\frac{a-b}{x} \cdot \frac{y}{b-a} = \frac{a-b}{x} \cdot \frac{y}{-1(a-b)} = -\frac{y}{x}$$

EJEMPLO 7 Multiplique $\frac{3x+2}{2x-1} \cdot \frac{4-8x}{3x+2}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{3x+2}{2x-1} \cdot \frac{4-8x}{3x+2} &= \frac{3x+2}{2x-1} \cdot \frac{4(1-2x)}{3x+2} && \text{Factorizar.} \\ &= \frac{\cancel{3x+2}}{2x-1} \cdot \frac{4(1-2x)}{\cancel{3x+2}} && \text{Dividir entre los factores comunes.} \end{aligned}$$

Observe que el factor $(1-2x)$ en el numerador de la segunda fracción sólo difiere en signo de $2x-1$, el denominador de la primera fracción. Por tanto; factorizamos -1 de cada término de $(1-2x)$ en el numerador de la segunda fracción.

$$\begin{aligned} &= \frac{\cancel{3x+2}}{2x-1} \cdot \frac{4(-1)(2x-1)}{\cancel{3x+2}} && \text{Factorizar } -1 \text{ del segundo numerador.} \\ &= \frac{\cancel{3x+2}}{2x-1} \cdot \frac{-4(\cancel{2x-1})}{\cancel{3x+2}} && \text{Dividir entre los factores comunes.} \\ &= \frac{-4}{1} = -4 \end{aligned}$$



EJEMPLO 8 Multiplique $\frac{2x^2+5x-12}{6x^2-11x+3} \cdot \frac{3x^2+2x-1}{x^2+5x+4}$.

Solución

Factorizamos completamente los numeradores y denominadores, y luego dividimos entre los factores comunes.

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+5x-12}{6x^2-11x+3} \cdot \frac{3x^2+2x-1}{x^2+5x+4} &= \frac{(2x-3)(x+4)}{(2x-3)(3x-1)} \cdot \frac{(3x-1)(x+1)}{(x+1)(x+4)} \\ &= \frac{\cancel{(2x-3)} \cancel{(x+4)}}{\cancel{(2x-3)} \cancel{(3x-1)}} \cdot \frac{\cancel{(3x-1)} \cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)} \cancel{(x+4)}} = 1 \end{aligned}$$



EJEMPLO 9 Multiplique $\frac{2x^3-14x^2+12x}{6y^2} \cdot \frac{-2y}{3x^2-3x}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{2x^3-14x^2+12x}{6y^2} \cdot \frac{-2y}{3x^2-3x} &= \frac{2x(x^2-7x+6)}{6y^2} \cdot \frac{-2y}{3x(x-1)} \\ &= \frac{2x(x-6)(x-1)}{6y^2} \cdot \frac{-2y}{3x(x-1)} \\ &= \frac{\cancel{2} \cancel{x} (x-6) \cancel{(x-1)}}{\underset{3}{\cancel{6}} y^2} \cdot \frac{-2\cancel{y}}{\cancel{3} \cancel{x} \cancel{(x-1)}} \\ &= \frac{-2(x-6)}{9y} = \frac{-2x+12}{9y} \end{aligned}$$



EJEMPLO 10 Multiplique $\frac{x^2 - y^2}{x + y} \cdot \frac{x + 2y}{2x^2 - xy - y^2}$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - y^2}{x + y} \cdot \frac{x + 2y}{2x^2 - xy - y^2} &= \frac{(x + y)(x - y)}{x + y} \cdot \frac{x + 2y}{(2x + y)(x - y)} \\ &= \frac{\cancel{(x + y)} \cdot \cancel{(x - y)}}{\cancel{x + y}} \cdot \frac{x + 2y}{(2x + y) \cdot \cancel{(x - y)}} \\ &= \frac{x + 2y}{2x + y}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 19



2 División de expresiones racionales

En el capítulo 1 aprendimos que para dividir una fracción entre otra, invertimos el divisor y multiplicamos.

Para dividir dos fracciones

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0, \quad y \quad c \neq 0$$

EJEMPLO 11 Divida **a)** $\frac{2}{7} \div \frac{5}{7}$ **b)** $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$

Solución **a)** $\frac{2}{7} \div \frac{5}{7} = \frac{2}{7} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 5} = \frac{2}{5}$ **b)** $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 5} = \frac{9}{10}$



Para **dividir expresiones racionales** se utilizan los mismos principios.

Para dividir expresiones racionales

Obtenga el inverso del divisor (la segunda fracción) y multiplique.

EJEMPLO 12 Divida $\frac{8x^3}{z} \div \frac{5z^3}{3}$.

Solución

Obtenemos el inverso del divisor (la segunda fracción), y luego multiplicamos.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 25

$$\frac{8x^3}{z} \div \frac{5z^3}{3} = \frac{8x^3}{z} \cdot \frac{3}{5z^3} = \frac{24x^3}{5z^4}$$



EJEMPLO 13 Divida $\frac{x^2 - 9}{x + 4} \div \frac{x - 3}{x + 4}$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 9}{x + 4} \div \frac{x - 3}{x + 4} &= \frac{x^2 - 9}{x + 4} \cdot \frac{x + 4}{x - 3} \\ &= \frac{(x + 3) \cdot \cancel{(x - 3)}}{\cancel{x + 4}} \cdot \frac{\cancel{x + 4}}{\cancel{x - 3}} = x + 3\end{aligned}$$

Obtener el inverso del divisor y multiplicar.

Factorizar y dividir entre los factores comunes.



EJEMPLO 14 Divida $\frac{-1}{2x-3} \div \frac{3}{3-2x}$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{-1}{2x-3} \div \frac{3}{3-2x} &= \frac{-1}{2x-3} \cdot \frac{3-2x}{3} && \text{Obtener el inverso del divisor y multiplicar.} \\ &= \frac{-1}{\cancel{2x-3}} \cdot \frac{-1(\cancel{2x-3})}{3} && \text{Factorizar } -1, \text{ luego dividir entre los factores comunes.} \\ &= \frac{(-1)(-1)}{(1)(3)} = \frac{1}{3}\end{aligned}$$



EJEMPLO 15 Divida $\frac{w^2 - 11w + 30}{w^2} \div (w-5)^2$.

Solución $(w-5)^2$ significa $\frac{(w-5)^2}{1}$. Factorizamos el numerador de la primera fracción; luego obtenemos el inverso del divisor y multiplicamos.

$$\begin{aligned}\frac{w^2 - 11w + 30}{w^2} \div (w-5)^2 &= \frac{w^2 - 11w + 30}{w^2} \cdot \frac{1}{(w-5)^2} \\ &= \frac{(w-6)(\cancel{w-5})}{w^2} \cdot \frac{1}{(\cancel{w-5})(w-5)} \\ &= \frac{w-6}{w^2(w-5)}\end{aligned}$$



EJEMPLO 16 Divida $\frac{12x^2 - 22x + 8}{3x} \div \frac{3x^2 + 2x - 8}{2x^2 + 4x}$.

Solución

$$\begin{aligned}\frac{12x^2 - 22x + 8}{3x} \div \frac{3x^2 + 2x - 8}{2x^2 + 4x} &= \frac{12x^2 - 22x + 8}{3x} \cdot \frac{2x^2 + 4x}{3x^2 + 2x - 8} \\ &= \frac{2(6x^2 - 11x + 4)}{3x} \cdot \frac{2x(x+2)}{(3x-4)(x+2)} \\ &= \frac{2(\cancel{3x-4})(2x-1)}{3x} \cdot \frac{2\cancel{x}(\cancel{x+2})}{(\cancel{3x-4})(\cancel{x+2})} \\ &= \frac{4(2x-1)}{3} = \frac{8x-4}{3}\end{aligned}$$



AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 35

Conjunto de ejercicios 6.2

Ejercicios conceptuales

1. En sus palabras, explique cómo multiplicar expresiones racionales.
2. En sus palabras, explique cómo dividir expresiones racionales.

¿Qué polinomio debe colocarse en el área sombreada de la segunda fracción para hacer verdadera cada una de las proposiciones? Explique cómo determinó su respuesta.

$$3. \frac{x+3}{x-4} \cdot \frac{\boxed{}}{x+3} = x+2$$

$$4. \frac{x-5}{x+2} \cdot \frac{\boxed{}}{x-5} = 2x-3$$

$$5. \frac{x-5}{x+5} \cdot \frac{x+5}{\boxed{}} = \frac{1}{x+3}$$

$$6. \frac{2x-1}{x-3} \cdot \frac{x-3}{\boxed{}} = \frac{1}{x-6}$$

Práctica de habilidades

Multiplique.

$$7. \frac{5x}{4y} \cdot \frac{y^2}{10}$$

$$10. \frac{7n^3}{32m} \cdot \frac{-4}{21m^2n^3}$$

$$13. \frac{3x-2}{3x+2} \cdot \frac{4x-1}{1-4x}$$

$$16. \frac{b^2+7b+12}{2b} \cdot \frac{b^2-4b}{b^2-b-12}$$

$$19. \frac{6x^2-14x-12}{6x+4} \cdot \frac{x+3}{2x^2-2x-12}$$

$$22. \frac{2t^2-t-6}{2t^2-3t-2} \cdot \frac{2t^2-5t-3}{2t^2+11t+12}$$

$$8. \frac{15x^3y^2}{z} \cdot \frac{z}{5xy^3}$$

$$11. \frac{6x^5y^3}{5z^3} \cdot \frac{6x^4}{5yz^4}$$

$$14. \frac{m-5}{2m+5} \cdot \frac{3m}{-m+5}$$

$$17. \frac{a}{a^2-b^2} \cdot \frac{a+b}{a^2+ab}$$

$$20. \frac{2x^2-9x+9}{8x-12} \cdot \frac{2x}{x^2-3x}$$

$$23. \frac{x+3}{x-3} \cdot \frac{x^3-27}{x^2+3x+9}$$

$$9. \frac{16x^2}{y^4} \cdot \frac{5x^2}{y^2}$$

$$12. \frac{x^2-9}{x^2-16} \cdot \frac{x-4}{x-3}$$

$$15. \frac{x^2+7x+12}{x+4} \cdot \frac{1}{x+3}$$

$$18. \frac{t^2-36}{t^2+t-30} \cdot \frac{t-5}{3t}$$

$$21. \frac{3x^2-13x-10}{x^2-2x-15} \cdot \frac{x^2+x-2}{3x^2-x-2}$$

$$24. \frac{x^3+8}{x^2-x-6} \cdot \frac{x+3}{x^2-2x+4}$$

Divida.

$$25. \frac{9x^3}{y^2} \div \frac{3x}{y^3}$$

$$28. \frac{36y}{7z^2} \div \frac{3xy}{2z}$$

$$31. \frac{10r+5}{r} \div \frac{2r+1}{r^2}$$

$$34. \frac{1}{x^2+7x-18} \div \frac{1}{x^2-17x+30}$$

$$37. \frac{2x^2+9x+4}{x^2+7x+12} \div \frac{2x^2-x-1}{(x+3)^2}$$

$$40. \frac{9x^2-9y^2}{6x^2y^2} \div \frac{3x+3y}{12x^2y^5}$$

$$26. \frac{9x^3}{4} \div \frac{1}{16y^2}$$

$$29. \frac{5xy}{7ab^2} \div \frac{6xy}{7}$$

$$32. \frac{x-3}{4y^2} \div \frac{x^2-9}{2xy}$$

$$35. \frac{x^2-12x+32}{x^2-6x-16} \div \frac{x^2-x-12}{x^2-5x-24}$$

$$38. \frac{a^2-b^2}{9} \div \frac{3a-3b}{27x^2}$$

$$41. \frac{5x^2-4x-1}{5x^2+6x+1} \div \frac{x^2-5x+4}{x^2+2x+1}$$

$$27. \frac{15xy^2}{4z} \div \frac{5x^2y^2}{12z^2}$$

$$30. 2xz \div \frac{4xy}{z}$$

$$33. \frac{x^2+5x-14}{x} \div \frac{x-2}{x}$$

$$36. \frac{a-b}{9a+9b} \div \frac{a^2-b^2}{a^2+2a+1}$$

$$39. \frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2} \div \frac{x+y}{y-x}$$

$$42. \frac{7n^2-15n+2}{n^2+n-6} \div \frac{n^2-3n-10}{n^2-2n-15}$$

Realice cada una de las operaciones que se indican.

$$43. \frac{9x}{6y^2} \cdot \frac{24x^2y^4}{9x}$$

$$46. \frac{-2xw}{y^5} \div \frac{6x^2}{y^6}$$

$$49. \frac{100m^6}{21x^5y^7} \cdot \frac{14x^{12}y^5}{25m^5}$$

$$44. \frac{5z^3}{8} \cdot \frac{9x^2}{15z}$$

$$47. \frac{-xy}{a} \div \frac{-2ax}{6y}$$

$$50. \frac{-18x^2y}{11z^2} \cdot \frac{22z^3}{x^2y^5}$$

$$45. \frac{63a^2b^3}{16c^3} \cdot \frac{4c^4}{9a^3b^5}$$

$$48. \frac{27x}{5y^2} \div 3x^2y^2$$

$$51. (3x+5) \cdot \frac{1}{6x+10}$$

52. $\frac{1}{4x-3} \cdot (20x-15)$

53. $\frac{1}{4x^2y^2} \div \frac{1}{28x^3y}$

54. $\frac{x^2y^5}{3z} \div \frac{3z}{2x}$

55. $\frac{(4m)^2}{8n^3} \div \frac{m^6n^8}{4}$

56. $\frac{3r^5s^2}{(r^2s^3)^3} \cdot \frac{6r^4}{4s}$

57. $\frac{r^2+5r+6}{r^2+9r+18} \cdot \frac{r^2+4r-12}{r^2-5r+6}$

58. $\frac{z^2-z-20}{z^2-3z-10} \cdot \frac{(z+2)^2}{(z+4)^2}$

59. $\frac{x^2-10x+24}{x^2-8x+12} \div \frac{x^2-7x+12}{x^2-6x+8}$

60. $\frac{p^2-5p+6}{p^2-10p+16} \div \frac{p^2+2p}{p^2-6p-16}$

61. $\frac{3z^2-4z-4}{z^2-4} \cdot \frac{2z^2+5z+2}{2z^2-3z-2}$

62. $\frac{2w^2+3w-35}{w^2-7w-8} \cdot \frac{w^2-5w-24}{w^2+8w+15}$

63. $\frac{2x^2-19x+24}{x^2-12x+32} \div \frac{2x^2+x-6}{x^2+7x+10}$

64. $\frac{q^2-11q+30}{2q^2-7q-15} \div \frac{q^2-2q-24}{q^2-q-20}$

65. $\frac{4n^2-9}{9n^2-1} \cdot \frac{3n^2-2n-1}{2n^2-5n+3}$

66. $\frac{2z^2+9z+9}{4z^2-9} \div \frac{(z+3)^2}{(2z-3)^2}$

Solución de problemas

Realice cada operación que se indica. Trate a Δ y $\odot$ como si fuesen variables.

67. $\frac{6\Delta^2}{12} \cdot \frac{12}{36\Delta^5}$

68. $\frac{\Delta-6}{2\Delta+5} \cdot \frac{2\Delta}{-\Delta+6}$

69. $\frac{\Delta - \odot}{9\Delta - 9\odot} \div \frac{\Delta^2 - \odot^2}{\Delta^2 + 2\Delta\odot + \odot^2}$

70. $\frac{\Delta^2 - \odot^2}{\Delta^2 - 2\Delta\odot + \odot^2} \div \frac{\Delta + \odot}{\odot - \Delta}$

Para cada ecuación, escriba un binomio o trinomio en el área sombreada para hacer verdadera la proposición. Explique cómo determinó su respuesta.

71. $\frac{\boxed{}}{x+2} = x+1$

72. $\frac{x+3}{\boxed{}} = \frac{1}{x-3}$

73. $\frac{\boxed{}}{x-5} = x+2$

74. $\frac{\boxed{}}{x^2-7x+10} = \frac{1}{x-5}$

75. $\frac{\boxed{}}{x^2-4} \cdot \frac{x+2}{x-1} = 1$

76. $\frac{x+4}{x^2+9x+20} \cdot \frac{\boxed{}}{x-2} = 1$

Problemas de reto

Simplifique.

77. $\left(\frac{x+2}{x^2-4x-12} \cdot \frac{x^2-9x+18}{x-2} \right) \div \frac{x^2+5x+6}{x^2-4}$

78. $\left(\frac{x^2-x-6}{2x^2-9x+9} \div \frac{x^2+x-12}{x^2+3x-4} \right) \cdot \frac{2x^2-5x+3}{x^2+x-2}$

79. $\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2-6x-16} \right) \div \left(\frac{x^2+5x+6}{x^2-9x+8} \cdot \frac{x^2-1}{x^2+4x+4} \right)$

80. $\left(\frac{x^2+4x+3}{x^2-6x-16} \div \frac{x^2+5x+6}{x^2-9x+8} \right) \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2+4x+4} \right)$

Para los ejercicios 81 y 82, determine los polinomios que cuando son colocados en el área sombreada hacen verdadera la proposición. Explique cómo determinó su respuesta.

81. $\frac{\boxed{}}{\boxed{}} \cdot \frac{x^2+3x-4}{x^2-4x+3} = \frac{x-2}{x-5}$

82. $\frac{\boxed{}}{x^2+x-2} \cdot \frac{x^2+6x+8}{\boxed{}} = \frac{x+3}{x+5}$



Actividad en grupo

83. Consideren los tres problemas siguientes:

$$(1) \left(\frac{x+2}{x-3} \right) \div \left(\frac{x^2-5x+6}{x-2} \cdot \frac{x+2}{x-3} \right)$$

$$(2) \left(\frac{x+2}{x-3} \div \frac{x^2-5x+6}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{x+2}{x-3} \right)$$

$$(3) \left(\frac{x+2}{x-3} \right) \div \left(\frac{x^2-5x+6}{x-2} \right) \cdot \left(\frac{x+2}{x-3} \right)$$

- a) Sin resolverlo, en grupo decidan cuáles de ellos tendrán la misma respuesta.
- b) De forma individual, simplifique cada uno de los tres problemas
- c) Compare sus respuestas de la parte b) con los otros miembros de su grupo. Si no obtuvo las mismas respuestas, explique por qué.

Ejercicios de repaso acumulativo

[3.6] 84. Remolcador Un remolcador deja el puerto y viaja a un promedio de 15 millas por hora hacia un barco de fiestas para remolcarlo hacia el puerto. En el viaje de regreso, jalando el barco de fiestas, el remolcador promedia 5 millas por hora. Si el viaje de regreso al muelle le tomó 2 horas más que el viaje de ida, determine el tiempo que tardó el remolcador en llegar al barco de fiestas.



[4.5] 85. Multiplique $(4x^3y^2z^4)(5xy^3z^7)$.

[4.6] 86. Divida $\frac{4x^3-5x}{2x-1}$.

[5.4] 87. Factorice $3x^2 - 9x - 30$.

[5.6] 88. Resuelva $3x^2 - 9x - 30 = 0$.

6.3 SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES RACIONALES CON DENOMINADOR COMÚN Y DETERMINACIÓN DEL MÍNIMO COMÚN DENOMINADOR



- 1 Sumar y restar expresiones racionales con un denominador común.
- 2 Determinar el mínimo común denominador (mcd).

1 Sumar y restar expresiones racionales con un denominador común

Recuerde que cuando sumamos (o restamos) dos fracciones aritméticas con un denominador común, sumamos (o restamos) los numeradores y conservamos el denominador común.

Para sumar o restar dos fracciones

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, c \neq 0 \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, c \neq 0$$

EJEMPLO 1 a) Sume $\frac{5}{16} + \frac{8}{16}$. b) Reste $\frac{5}{9} - \frac{1}{9}$.

Solución a) $\frac{5}{16} + \frac{8}{16} = \frac{5+8}{16} = \frac{13}{16}$ b) $\frac{5}{9} - \frac{1}{9} = \frac{5-1}{9} = \frac{4}{9}$



En el ejemplo **1a)** observe que no simplificamos $\frac{8}{16}$ a $\frac{1}{2}$. Las fracciones se dan con un denominador común, 16. Si $\frac{8}{16}$ se simplificase a $\frac{1}{2}$, perderíamos el denominador común que se necesita para sumar o restar fracciones.

Cuando **sumamos o restamos expresiones racionales** que tienen variables, se aplican los mismos principios.

Para sumar o restar expresiones racionales con un denominador común

1. Sume o reste los denominadores.
2. Coloque la suma o diferencia de los numeradores que determinó en el paso 1 sobre el denominador común.
3. Si es posible, simplifique la fracción.

EJEMPLO 2 Sume $\frac{3}{x-4} + \frac{x+2}{x-4}$.

Solución

$$\frac{3}{x-4} + \frac{x+2}{x-4} = \frac{3+(x+2)}{x-4} = \frac{x+5}{x-4}$$



EJEMPLO 3 Sume $\frac{2x^2+5}{x+3} + \frac{6x-5}{x+3}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{2x^2+5}{x+3} + \frac{6x-5}{x+3} &= \frac{(2x^2+5) + (6x-5)}{x+3} \\ &= \frac{2x^2+5+6x-5}{x+3} \\ &= \frac{2x^2+6x}{x+3} \end{aligned}$$

Ahora, de cada término en el numerador, factorice 2x y simplifique.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 21

$$= \frac{2x(\cancel{x+3})}{\cancel{x+3}} = 2x$$



EJEMPLO 4 Sume $\frac{x^2+3x-2}{(x+5)(x-2)} + \frac{4x+12}{(x+5)(x-2)}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 + 3x - 2}{(x + 5)(x - 2)} + \frac{4x + 12}{(x + 5)(x - 2)} &= \frac{(x^2 + 3x - 2) + (4x + 12)}{(x + 5)(x - 2)} \\
&= \frac{x^2 + 3x - 2 + 4x + 12}{(x + 5)(x - 2)} \\
&= \frac{x^2 + 7x + 10}{(x + 5)(x - 2)} \\
&= \frac{\cancel{(x + 5)}(x + 2)}{\cancel{(x + 5)}(x - 2)} \\
&= \frac{x + 2}{x - 2}
\end{aligned}$$

Escribir como una sola fracción.

Quitar paréntesis en el numerador.

Reducir términos semejantes.

Factorizar, dividir entre el factor común.



Cuando reste expresiones racionales, asegúrese de restar el numerador completo de la fracción que será restada. Estudie detenidamente el siguiente recuadro de Cómo evitar errores comunes.

CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Considere la sustracción

$$\frac{4x}{x - 2} - \frac{2x + 1}{x - 2}$$

Muchas personas resuelven de forma incorrecta problemas de este tipo. Aquí están las formas correcta e incorrecta de resolver este problema.

CORRECTA

$$\begin{aligned}
\frac{4x}{x - 2} - \frac{2x + 1}{x - 2} &= \frac{4x - (2x + 1)}{x - 2} \\
&= \frac{4x - 2x - 1}{x - 2} \\
&= \frac{2x - 1}{x - 2}
\end{aligned}$$

INCORRECTA

$$\frac{4x}{x - 2} - \frac{2x + 1}{x - 2} = \frac{4x - 2x + 1}{x - 2}$$

Observe que todo el numerador de la segunda fracción (y no sólo el primer término) **debe restarse**. También note que cambiará el signo de *cada* término del numerador que se restará cuando se eliminan los paréntesis.

EJEMPLO 5

Reste $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 7x + 12} - \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 7x + 12}$.

Solución

$$\begin{aligned}
\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 + 7x + 12} - \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 + 7x + 12} &= \frac{(x^2 - 2x + 3) - (x^2 - 4x - 5)}{x^2 + 7x + 12} \\
&= \frac{x^2 - 2x + 3 - x^2 + 4x + 5}{x^2 + 7x + 12} \\
&= \frac{2x + 8}{x^2 + 7x + 12} \\
&= \frac{2(x + 4)}{(x + 3)(x + 4)} \\
&= \frac{2}{x + 3}
\end{aligned}$$

Escribir como una sola fracción.

Eliminar paréntesis.

Reducir términos semejantes.

Factorizar, dividir entre el factor común.



La variable que se utiliza cuando se trabaja con expresiones racionales es irrelevante. En el ejemplo 6, trabajamos con expresiones racionales con la variable r .

EJEMPLO 6 Reste $\frac{6r}{r-5} - \frac{4r^2 - 17r + 15}{r-5}$.

Solución

$$\frac{6r}{r-5} - \frac{4r^2 - 17r + 15}{r-5} = \frac{6r - (4r^2 - 17r + 15)}{r-5}$$

Escribir como una sola fracción.

$$= \frac{6r - 4r^2 + 17r - 15}{r-5}$$

Eliminar paréntesis.

$$= \frac{-4r^2 + 23r - 15}{r-5}$$

Reducir términos semejantes.

$$= \frac{-(4r^2 - 23r + 15)}{r-5}$$

Factorizar un -1 .

$$= \frac{-(4r-3)(\cancel{r-5})}{\cancel{r-5}}$$

Factorizar, dividir entre el factor común.

$$= -(4r-3) \quad \text{o bien} \quad -4r+3$$



**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 43**

2 Determinar el mínimo común denominador (mcd)

Para sumar dos fracciones con denominadores diferentes, primero debemos obtener un denominador común. Ahora explicamos cómo determinar el **mínimo común denominador (mcd)** para expresiones racionales. Utilizaremos esta información en la sección 6.4, cuando sumemos y restemos expresiones racionales.

EJEMPLO 7 Sume $\frac{5}{7} + \frac{2}{3}$.

Solución

El mínimo común denominador (mcd) de las fracciones $\frac{5}{7}$ y $\frac{2}{3}$ es 21. Veintiuno es el número más pequeño que es divisible entre ambos denominadores, 7 y 3. Escribimos nuevamente cada fracción de modo que su denominador sea 21.

$$\begin{aligned} \frac{5}{7} + \frac{2}{3} &= \frac{3}{3} \cdot \frac{5}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{7} \\ &= \frac{15}{21} + \frac{14}{21} = \frac{29}{21} \quad \text{o bien} \quad 1\frac{8}{21} \end{aligned}$$



Para sumar o restar expresiones racionales, debemos escribir cada expresión con un denominador común.

Para determinar el mínimo común denominador de expresiones racionales

1. Factorice completamente cada denominador. Cualesquiera factores que aparezcan más de una vez deben expresarse como potencias. Por ejemplo, $(x-3)(x-3)$ debe expresarse como $(x-3)^2$.
2. Liste todos los factores diferentes (distintos de 1) que aparezcan en cada uno de los denominadores. Cuando aparezca el mismo factor en más de un denominador, escriba ese factor con la potencia más alta con que aparezca.
3. El mínimo común denominador es el producto de todos los factores que se listaron en el paso 2.

EJEMPLO 8 Determine el mínimo común denominador.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{y}$$

Solución El único factor (distinto de 1) del primer denominador es 3. El único factor (distinto de 1) del segundo denominador es y . Por tanto el mcd es $3 \cdot y = 3y$. 

EJEMPLO 9 Determine el mcd.

$$\frac{5}{x^2} - \frac{3}{7x}$$

Solución Los factores que aparecen en los denominadores son 7 y x . Liste cada factor con su exponente más grande. El mcd es el producto de estos factores

$$\text{mcd} = 7 \cdot x^2 = 7x^2$$

 Mayor potencia de x .

EJEMPLO 10 Determine el mcd.

$$\frac{1}{18x^3y} + \frac{5}{27x^2y^3}$$

Solución Escriba 18 y 27 como productos de factores primos: $18 = 2 \cdot 3^2$ y $27 = 3^3$. Si olvidó cómo escribir un número como un producto de factores primos, lea ahora la sección 5.1 o el apéndice B.

$$\frac{1}{18x^3y} + \frac{5}{27x^2y^3} = \frac{1}{2 \cdot 3^2 x^3 y} + \frac{5}{3^3 x^2 y^3}$$

Los factores que aparecen son 2, 3, x y y . Liste las potencias más grandes de estos factores.

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 61**

$$\text{mcd} = 2 \cdot 3^3 \cdot x^3 \cdot y^3 = 54x^3y^3$$

EJEMPLO 11 Determine el mcd.

$$\frac{5}{x} - \frac{7y}{x+3}$$

Solución Los factores en el denominador son x y $x+3$. Observe que x en el segundo denominador, $x+3$, es un término, no un factor.

$$\text{mcd} = x(x+3)$$

EJEMPLO 12 Determine el mcd.

$$\frac{7}{3x^2 - 6x} + \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4}$$

Solución Factorice ambos denominadores.

$$\begin{aligned} \frac{7}{3x^2 - 6x} + \frac{x^2}{x^2 - 4x + 4} &= \frac{7}{3x(x-2)} + \frac{x^2}{(x-2)(x-2)} \\ &= \frac{7}{3x(x-2)} + \frac{x^2}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Los factores en los denominadores son 3, x y $x - 2$. Liste la potencia más grande de cada uno de estos factores.

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 85**

$$\text{mcd} = 3 \cdot x \cdot (x - 2)^2 = 3x(x - 2)^2.$$



EJEMPLO 13 Determine el mcd.

$$\frac{5x}{x^2 - x - 12} - \frac{6x^2}{x^2 - 7x + 12}$$

Solución Factorice ambos denominadores.

$$\frac{5x}{x^2 - x - 12} - \frac{6x^2}{x^2 - 7x + 12} = \frac{5x}{(x + 3)(x - 4)} - \frac{6x^2}{(x - 3)(x - 4)}$$

Los factores en los denominadores son $x + 3$, $x - 4$ y $x - 3$.

$$\text{mcd} = (x + 3)(x - 4)(x - 3)$$

Aunque $x - 4$ es un factor común de cada denominador, la potencia más grande con que aparece ese factor en cada denominador es 1.



EJEMPLO 14 Determine el mcd.

$$\frac{6w}{w^2 - 14w + 45} + w + 5$$

Solución Factorice el denominador del primer término.

$$\frac{6w}{w^2 - 14w + 45} + w + 5 = \frac{6w^2}{(w - 5)(w - 9)} + w + 5$$

Como el denominador de $w + 5$ es 1, la expresión puede volverse a escribir como

$$\frac{6w}{(w - 5)(w - 9)} + \frac{w + 5}{1}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 89**

Por tanto, el mcd es $1(w - 5)(w - 9)$ o simplemente $(w - 5)(w - 9)$.



Conjunto de ejercicios 6.3

Ejercicios conceptuales

- Con sus palabras, explique cómo sumar o restar expresiones racionales con un denominador común.
- Cuando se restan expresiones racionales, ¿qué debe pasarle al signo de cada término del numerador que se restará?
- Con sus palabras, explique cómo determinar el mínimo común denominador de dos expresiones racionales.
- En la suma $\frac{1}{x} + \frac{1}{x + 1}$, ¿el mínimo común denominador es x , $x + 1$ o $x(x + 1)$? Explique.

Determine el mcd que se utilizará para realizar cada operación que se indica. Explique cómo determinar el mcd. No realice las operaciones.

5. $\frac{5}{x + 6} - \frac{2}{x}$

6. $\frac{2}{x - 2} + \frac{3}{5}$

7. $\frac{2}{x + 3} + \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$

8. $\frac{6}{x - 3} + \frac{1}{x} - \frac{1}{3}$

En los ejercicios 9 a 12 **a)** explique por qué la expresión a la izquierda del signo $=$ no es igual a la expresión del lado derecho; **b)** muestre qué debe hacerse a la expresión del lado derecho para que sea igual a la del lado izquierdo.

$$\begin{array}{ll} \text{9. } \frac{4x-3}{5x+4} - \frac{2x-7}{5x+4} \neq \frac{4x-3-2x-7}{5x+4} & \text{10. } \frac{5x}{2x-3} - \frac{-3x-7}{2x-3} \neq \frac{5x+3x-7}{2x-3} \\ \text{11. } \frac{6x-2}{x^2-4x+3} - \frac{3x^2-4x+5}{x^2-4x+3} \neq \frac{6x-2-3x^2-4x+5}{x^2-4x+3} & \\ \text{12. } \frac{4x+5}{x^2-6x} - \frac{-x^2+3x+6}{x^2-6x} \neq \frac{4x+5+x^2+3x+6}{x^2-6x} & \end{array}$$

Práctica de habilidades

Suma o resta.

$$\begin{array}{lll} \text{13. } \frac{x-2}{7} + \frac{2x}{7} & \text{14. } \frac{2x-7}{5} - \frac{6}{5} & \text{15. } \frac{3r+2}{4} - \frac{3}{4} \\ \text{16. } \frac{3x+6}{2} - \frac{x}{2} & \text{17. } \frac{2}{x} + \frac{x+4}{x} & \text{18. } \frac{3x+4}{x+1} + \frac{6x+5}{x+1} \\ \text{19. } \frac{n-5}{n} - \frac{n+7}{n} & \text{20. } \frac{x-6}{x} - \frac{x+4}{x} & \text{21. } \frac{x}{x-1} + \frac{4x+7}{x-1} \\ \text{22. } \frac{4x-3}{x-7} - \frac{2x+8}{x-7} & \text{23. } \frac{4t+7}{5t^2} - \frac{3t+4}{5t^2} & \text{24. } \frac{3w+5}{w^2+2w+1} + \frac{-2w-4}{w^2+2w+1} \\ \text{25. } \frac{5x+4}{x^2-x-12} + \frac{-4x-1}{x^2-x-12} & \text{26. } \frac{-x-4}{x^2-16} + \frac{2(x+4)}{x^2-16} & \text{27. } \frac{x+4}{3x+2} - \frac{x+4}{3x+2} \\ \text{28. } \frac{2m+5}{(m+4)(m-3)} - \frac{m+1}{(m+4)(m-3)} & \text{29. } \frac{2p-5}{p-5} - \frac{p+5}{p-5} & \text{30. } \frac{x^2-6}{3x} - \frac{x^2+4x-5}{3x} \\ \text{31. } \frac{x^2+4x+3}{x+2} - \frac{5x+9}{x+2} & \text{32. } \frac{-4x+2}{3x+6} + \frac{4(x-1)}{3x+6} & \text{33. } \frac{3x+11}{2x+10} - \frac{2(x+3)}{2x+10} \\ \text{34. } \frac{x^2}{x+4} - \frac{16}{x+4} & \text{35. } \frac{b^2-2b-3}{b^2-b-6} + \frac{b-3}{b^2-b-6} & \text{36. } \frac{4x+12}{3-x} - \frac{3x+15}{3-x} \\ \text{37. } \frac{t-3}{t+3} - \frac{-3t-15}{t+3} & \text{38. } \frac{x^2-2}{x^2+6x-7} - \frac{-4x+19}{x^2+6x-7} & \text{39. } \frac{x^2+2x}{(x+6)(x-3)} - \frac{15}{(x+6)(x-3)} \\ \text{40. } \frac{x^2-13}{x+5} - \frac{12}{x+5} & \text{41. } \frac{3x^2-7x}{4x^2-8x} + \frac{x}{4x^2-8x} & \text{42. } \frac{x^3-10x^2+35x}{x(x-6)} - \frac{x^2+5x}{x(x-6)} \\ \text{43. } \frac{3x^2-4x+4}{3x^2+7x+2} - \frac{10x+9}{3x^2+7x+2} & \text{44. } \frac{3x^2+15x}{x^3+2x^2-8x} + \frac{2x^2+5x}{x^3+2x^2-8x} & \text{45. } \frac{x^2+3x-6}{x^2-5x+4} - \frac{-2x^2+4x-4}{x^2-5x+4} \\ \text{46. } \frac{4x^2+5}{9x^2-64} - \frac{x^2-x+29}{9x^2-64} & \text{47. } \frac{5x^2+40x+8}{x^2-64} + \frac{x^2+9x}{x^2-64} & \text{48. } \frac{20x^2+5x+1}{6x^2+x-2} - \frac{8x^2-12x-5}{6x^2+x-2} \end{array}$$

Determine el mínimo común denominador de cada expresión.

$$\begin{array}{lll} \text{49. } \frac{x}{5} + \frac{x+4}{5} & \text{50. } \frac{2+r}{3} - \frac{12}{3} & \text{51. } \frac{1}{n} + \frac{1}{5n} \\ \text{52. } \frac{1}{x+1} - \frac{4}{7} & \text{53. } \frac{3}{5x} + \frac{7}{4} & \text{54. } \frac{5}{2x} + 1 \\ \text{55. } \frac{6}{p} + \frac{3}{p^3} & \text{56. } \frac{2x}{x+3} + \frac{6}{x-4} & \text{57. } \frac{m+3}{3m-4} + m \\ \text{58. } \frac{x+4}{2x} + \frac{3}{7x} & \text{59. } \frac{x}{2x+3} + \frac{4}{x^2} & \text{60. } \frac{x}{3x^2} + \frac{9}{7x^3} \\ \text{61. } \frac{x+1}{12x^2y} - \frac{7}{9x^3} & \text{62. } \frac{-3}{8x^2y^2} + \frac{6}{5x^4y^5} & \text{63. } \frac{4}{2r^4s^5} - \frac{5}{9r^3s^7} \end{array}$$

64. $\frac{3}{4w^5z^4} + \frac{2}{9wz^2}$

65. $\frac{w^2 - 7}{12w} - \frac{w + 3}{9(w + 5)}$

66. $\frac{x - 3}{2x + 5} - \frac{6}{x - 5}$

67. $\frac{5x - 2}{x^2 + x} - \frac{x^2}{x}$

68. $\frac{4t}{t - 5} + \frac{2}{5 - t}$

69. $\frac{n}{4n - 1} + \frac{n - 2}{1 - 4n}$

70. $\frac{3}{-2a + 3b} - \frac{1}{2a - 3b}$

71. $\frac{6}{4k - 5r} - \frac{5}{-4k + 5r}$

72. $\frac{p}{4p^2 + 2p} - \frac{3}{2p + 1}$

73. $\frac{5}{2q^2 + 2q} - \frac{5}{3q}$

74. $\frac{10}{(x + 4)(x + 2)} - \frac{5 - x}{x + 2}$

75. $\frac{21}{24x^2y} + \frac{x + 4}{15xy^3}$

76. $\frac{p^2 - 4}{p^2 - 25} + \frac{3}{p - 5}$

77. $\frac{3}{3x + 12} + \frac{3x + 6}{2x + 4}$

78. $6x^2 + \frac{9x}{x - 3}$

79. $\frac{9x + 4}{x + 6} - \frac{3x - 6}{x + 5}$

80. $\frac{x + 1}{x^2 + 11x + 18} - \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 10}$

81. $\frac{x - 2}{x^2 - 5x - 24} + \frac{3}{x^2 + 11x + 24}$

82. $\frac{4n}{n^2 - 4} - \frac{n - 3}{n^2 - 5n - 14}$

83. $\frac{7}{(a - 4)^2} - \frac{a + 2}{a^2 - 7a + 12}$

84. $\frac{3x + 5}{x^2 - 1} + \frac{x^2 - 8}{(x + 1)^2}$

85. $\frac{2x}{x^2 + 6x + 5} - \frac{5x^2}{x^2 + 4x + 3}$

86. $\frac{6x + 5}{x + 2} + \frac{4x}{(x + 2)^2}$

87. $\frac{3x - 5}{x^2 - 6x + 9} + \frac{3}{x - 3}$

88. $\frac{7n + 7}{(n + 5)(n + 2)} - \frac{3n - 5}{(n - 3)(n + 5)}$

89. $\frac{8x^2}{x^2 - 7x + 6} + x - 3$

90. $\frac{x - 1}{x^2 - 25} + x - 4$

91. $\frac{t - 1}{3t^2 + 10t - 8} - \frac{6}{3t^2 + 11t - 4}$

92. $\frac{-4x + 7}{2x^2 + 5x + 2} + \frac{x^2}{3x^2 + 4x - 4}$

93. $\frac{2x - 3}{4x^2 + 4x + 1} + \frac{x^2 - 4}{8x^2 + 10x + 3}$

94. $\frac{3x + 1}{6x^2 + 5x - 6} + \frac{x^2 - 5}{9x^2 - 12x + 4}$

Solución de problemas

Liste los polinomios que deben colocarse en cada área sombreada para hacer que la proposición sea verdadera. Explique cómo determinó su respuesta.

95. $\frac{x^2 - 6x + 3}{x + 3} + \frac{\text{[]}}{x + 3} = \frac{2x^2 - 5x - 6}{x + 3}$

96. $\frac{4x^2 - 6x - 7}{x^2 - 4} - \frac{\text{[]}}{x^2 - 4} = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 - 4}$

97. $\frac{-x^2 - 4x + 3}{2x + 5} + \frac{\text{[]}}{2x + 5} = \frac{5x - 7}{2x + 5}$

98. $\frac{-3x^2 - 9}{(x + 4)(x - 2)} - \frac{\text{[]}}{(x + 4)(x - 2)} = \frac{x^2 + 3x}{(x + 4)(x - 2)}$

Determine el mínimo común denominador de cada expresión.

99. $\frac{3}{\odot} + \frac{4}{5\odot}$

100. $\frac{5}{8\Delta^2\odot^2} + \frac{6}{5\Delta^4\odot^5}$

101. $\frac{8}{\Delta^2 - 9} - \frac{2}{\Delta + 3}$

102. $\frac{6}{\Delta + 3} - \frac{\Delta + 5}{\Delta^2 - 4\Delta + 3}$

Problemas de reto

Realice cada operación que se indica.

$$103. \frac{4x-1}{x^2-25} - \frac{3x^2-8}{x^2-25} + \frac{8x-3}{x^2-25}$$

$$104. \frac{x^2-8x+2}{x+7} + \frac{2x^2-5x}{x+7} - \frac{3x^2+7x+6}{x+7}$$

Determine el mínimo común denominador de cada expresión.

$$105. \frac{7}{6x^5y^9} - \frac{9}{2x^3y} + \frac{4}{5x^{12}y^2}$$

$$106. \frac{12}{x-3} - \frac{5}{x^2-9} + \frac{7}{x+3}$$

$$107. \frac{4}{x^2-x-12} + \frac{3}{x^2-6x+8} + \frac{5}{x^2+x-6}$$

$$108. \frac{4}{x^2-4} - \frac{11}{3x^2+5x-2} + \frac{5}{3x^2-7x+2}$$

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.3] 109. Reste $4\frac{3}{5} - 2\frac{5}{9}$.

[2.5] 110. Resuelva $6x + 4 = -(x + 2) - 3x + 4$.

[2.6] 111. **Alimento para colibrí** Las instrucciones en una botella de alimento concentrado para colibríes indica que deben mezclarse 6 onzas del concentrado con 1 galón (128 onzas) de agua. Si desea mezclar el concentrado con sólo 48 onzas de agua, ¿cuánto concentrado debe utilizar?



[3.3] 112. **Gimnasio** El Gimnasio Norteño tiene dos planes de pago. Plan 1, es un pago de \$125 por membresía anual más \$2.50 por hora de uso de la cancha de tenis. Plan 2, es un pago de membresía anual de \$300 sin cobro por el uso de la cancha de tenis. ¿Cuántas horas en un año debe jugar Malcolm Wu para hacer que el costo del Plan 1 sea igual al costo del Plan 2?

[4.3] 113. Utilice la notación científica para evaluar $\frac{420,000,000}{0.0021}$.
Deje su respuesta en notación científica.

[5.6] 114. Resuelva $2x^2 - 3 = x$.

6.4 SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES RACIONALES



1 Suma y resta de expresiones racionales.

En la sección 6.3 analizamos cómo sumar y restar expresiones racionales con un denominador común. Ahora estudiamos la suma y resta de expresiones racionales que no tienen un denominador común.

1 Suma y resta de expresiones racionales

El método utilizado para sumar y restar expresiones racionales con denominadores no comunes se bosqueja en el ejemplo 1.

EJEMPLO 1 Sume $\frac{7}{x} + \frac{3}{y}$.

Solución Primero determinamos el mcd como se expuso en la sección 6.3.

$$\text{mcd} = xy$$

Escribimos cada fracción con el mcd. Hacemos esto, multiplicando **ambos**, numerador y denominador de cada fracción, por los factores necesarios para obtener el mcd.

En este problema, la fracción de la izquierda debe multiplicarse por y/y y la fracción de la derecha debe multiplicarse por x/x .

$$\frac{7}{x} + \frac{3}{y} = \frac{y}{y} \cdot \frac{7}{x} + \frac{3}{y} \cdot \frac{x}{x} = \frac{7y}{xy} + \frac{3x}{xy}$$

Al multiplicar el numerador y el denominador por el mismo factor, en realidad estamos multiplicando por 1, lo cual no cambia el valor de la fracción, sólo su apariencia. Así, la nueva fracción es equivalente a la fracción original.

Ahora sumamos los numeradores, y dejamos el mcd solo en el denominador.

$$\frac{7y}{xy} + \frac{3x}{xy} = \frac{7y + 3x}{xy} \quad \text{o bien} \quad \frac{3x + 7y}{xy}$$



Para sumar o restar dos expresiones racionales con denominadores no comunes

1. Determine el mcd.
2. Reescriba cada fracción como una fracción equivalente con el mcd. Esto se hace multiplicando el numerador y el denominador por los factores necesarios para obtener el mcd.
3. Sume o reste los numeradores y conserve el mcd.
4. Cuando sea posible, factorice el numerador que queda y simplifique la fracción.

EJEMPLO 2 Sume $\frac{5}{4x^2y} + \frac{3}{14xy^3}$.

Solución El mcd es $28x^2y^3$; debemos escribir cada fracción con el denominador $28x^2y^3$. Para hacer esto, multiplicamos la fracción de la izquierda por $7y^2/7y^2$ y la fracción de la derecha por $2x/2x$.

$$\begin{aligned} \frac{5}{4x^2y} + \frac{3}{14xy^3} &= \frac{7y^2}{7y^2} \cdot \frac{5}{4x^2y} + \frac{3}{14xy^3} \cdot \frac{2x}{2x} \\ &= \frac{35y^2}{28x^2y^3} + \frac{6x}{28x^2y^3} \\ &= \frac{35y^2 + 6x}{28x^2y^3} \quad \text{o bien} \quad \frac{6x + 35y^2}{28x^2y^3} \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 15**



SUGERENCIA

En el ejemplo 2 multiplicamos la primera fracción por $\frac{7y^2}{7y^2}$ y la segunda fracción por $\frac{2x}{2x}$ para obtener dos fracciones con un denominador común. ¿Cómo sabemos por cuál fracción multiplicar? Muchos de ustedes pueden determinar esto observando el mcd y luego determinando por qué factor es necesario multiplicar cada denominador para obtener el mcd. Si esto no es obvio, puede dividir el mcd por el denominador dado para determinar el factor por el que debe multiplicarse el numerador y el denominador

(continúa en la página siguiente)

de cada fracción. En el ejemplo 2, el mcd es $28x^2y^3$. Si dividimos $28x^2y^3$ entre cada denominador dado, $4x^2y$ y $14xy^3$, podemos determinar cuál es el factor por el que debe multiplicarse el numerador y el denominador de cada fracción,

$$\frac{28x^2y^3}{4x^2y} = 7y^2 \quad \frac{28x^2y^3}{14xy^3} = 2x$$

Así, $\frac{5}{4x^2y}$ debe multiplicarse por $\frac{7y^2}{7y^2}$ y $\frac{3}{14xy^3}$ debe multiplicarse por $\frac{2x}{2x}$ para obtener el mcd, $28x^2y^3$.

EJEMPLO 3 Sume $\frac{3}{x+2} + \frac{5}{x}$.

Solución Debemos escribir cada fracción con el mcd, que es $x(x+2)$. Para hacer esto, multiplicamos la fracción de la izquierda por x/x y la fracción de la derecha por $(x+2)/(x+2)$.

$$\begin{aligned} \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x} &= \frac{x}{x} \cdot \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x} \cdot \frac{x+2}{x+2} \\ &= \frac{3x}{x(x+2)} + \frac{5(x+2)}{x(x+2)} \\ &= \frac{3x}{x(x+2)} + \frac{5x+10}{x(x+2)} \\ &= \frac{3x + (5x+10)}{x(x+2)} \\ &= \frac{3x + 5x + 10}{x(x+2)} \\ &= \frac{8x + 10}{x(x+2)} \end{aligned}$$

Reescribir cada fracción como una fracción equivalente con el mcd.

Propiedad distributiva.

Escribir como una sola fracción.

Eliminar paréntesis en el numerador.

Reducir términos semejantes en el numerador.



**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 25**

SUGERENCIA

Mire la respuesta al ejercicio 3, $\frac{8x+10}{x(x+2)}$. Observe que el numerador podría factorizarse para obtener $\frac{2(4x+5)}{x(x+2)}$. También note que el denominador podría multiplicarse para obtener $\frac{8x+10}{x^2+2x}$. Las tres respuestas son equivalentes y cada una de ellas es correcta.

En esta sección, cuando escribamos las respuestas, a menos que exista un factor común en el numerador y el denominador, dejaremos el numerador sin factorizar y el denominador en forma factorizada. Si tanto el numerador como el denominador tiene un factor común, factorizaremos el numerador y simplificaremos la fracción.

EJEMPLO 4 Reste $\frac{w}{w-7} - \frac{3}{w-4}$.

Solución El mcd es $(w-7)(w-4)$. La fracción de la izquierda debe multiplicarse por $(w-4)/(w-4)$ para obtener el mcd. La fracción de la derecha debe multiplicarse por $(w-7)/(w-7)$ para obtener el mcd.

$$\begin{aligned}
\frac{w}{w-7} - \frac{3}{w-4} &= \frac{w-4}{w-4} \cdot \frac{w}{w-7} - \frac{3}{w-4} \cdot \frac{w-7}{w-7} \\
&= \frac{w(w-4)}{(w-4)(w-7)} - \frac{3(w-7)}{(w-4)(w-7)} \\
&= \frac{w^2 - 4w}{(w-4)(w-7)} - \frac{3w - 21}{(w-4)(w-7)} \\
&= \frac{(w^2 - 4w) - (3w - 21)}{(w-4)(w-7)} \\
&= \frac{w^2 - 4w - 3w + 21}{(w-4)(w-7)} \\
&= \frac{w^2 - 7w + 21}{(w-4)(w-7)}
\end{aligned}$$

Reescribir cada fracción como una fracción equivalente con el mcd.

Propiedad distributiva.

Escribir como una sola fracción.

Eliminar paréntesis en el numerador.

Reducir términos semejantes en el numerador.



EJEMPLO 5 Reste $\frac{x+2}{x-4} - \frac{x+3}{x+4}$.

Solución El mcd es $(x-4)(x+4)$.

$$\begin{aligned}
\frac{x+2}{x-4} - \frac{x+3}{x+4} &= \frac{x+4}{x+4} \cdot \frac{x+2}{x-4} - \frac{x+3}{x+4} \cdot \frac{x-4}{x-4} \\
&= \frac{(x+4)(x+2)}{(x+4)(x-4)} - \frac{(x+3)(x-4)}{(x+4)(x-4)}
\end{aligned}$$

Reescribir cada fracción como una fracción equivalente con el mcd.

Utilice el método PIES para multiplicar cada numerador.

$$\begin{aligned}
&= \frac{x^2 + 6x + 8}{(x+4)(x-4)} - \frac{x^2 - x - 12}{(x+4)(x-4)} \\
&= \frac{(x^2 + 6x + 8) - (x^2 - x - 12)}{(x+4)(x-4)} \\
&= \frac{x^2 + 6x + 8 - x^2 + x + 12}{(x+4)(x-4)} \\
&= \frac{7x + 20}{(x+4)(x-4)}
\end{aligned}$$

Escribir como una sola fracción.

Eliminar paréntesis en el numerador.

Reducir términos semejantes en el numerador.



**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 37**

Considere el problema

$$\frac{6}{x-2} + \frac{x+3}{2-x}$$

¿Cómo sumamos estas expresiones racionales? Podríamos escribir cada fracción con el denominador $(x-2)(2-x)$. Sin embargo, hay una forma más sencilla. Estudie la siguiente Sugerencia.

SUGERENCIA

Cuando sumamos o restamos fracciones cuyos denominadores son opuestos (y por tanto sólo difieren en signos), multiplique el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones por -1 . De esta forma, ambas fracciones tendrán el mismo denominador.

$$\begin{aligned}
\frac{x}{a-b} + \frac{y}{b-a} &= \frac{x}{a-b} + \frac{y}{b-a} \cdot \frac{-1}{-1} \\
&= \frac{x}{a-b} + \frac{-y}{a-b} \\
&= \frac{x-y}{a-b}
\end{aligned}$$

EJEMPLO 6 Sume $\frac{6}{x-2} + \frac{x+3}{2-x}$.

Solución Como los denominadores sólo difieren en signo, podemos multiplicar por -1 el numerador y el denominador de cualquiera de las fracciones. Aquí multiplicaremos el numerador y el denominador de la segunda fracción por -1 para obtener el denominador común $x-2$.

$$\begin{aligned}\frac{6}{x-2} + \frac{x+3}{2-x} &= \frac{6}{x-2} + \frac{x+3}{2-x} \cdot \frac{-1}{-1} && \text{Multiplicar por } -1 \text{ el} \\ & && \text{numerador y el} \\ & && \text{denominador.} \\ &= \frac{6}{x-2} + \frac{(-x-3)}{x-2} \\ &= \frac{6+(-x-3)}{x-2} && \text{Escribir como una} \\ & && \text{sola fracción.} \\ &= \frac{6-x-3}{x-2} && \text{Eliminar paréntesis} \\ & && \text{en el numerador.} \\ &= \frac{-x+3}{x-2} && \text{Reducir términos} \\ & && \text{semejantes en el} \\ & && \text{numerador.} \quad \star\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 31

Resolvamos otro ejemplo en donde los denominadores sólo difieren en el signo.

EJEMPLO 7 Reste $\frac{a-5}{3a-4} - \frac{2a-5}{4-3a}$.

Solución Los denominadores de las dos fracciones sólo difieren en el signo. Resolveremos este problema de una manera análoga a como resolvimos el ejemplo 6. Multiplicaremos por -1 el numerador y el denominador de la segunda fracción para obtener el denominador común $3a-4$.

$$\begin{aligned}\frac{a-5}{3a-4} - \frac{2a-5}{4-3a} &= \frac{a-5}{3a-4} - \frac{2a-5}{4-3a} \cdot \frac{-1}{-1} && \text{Multiplicar el numera-} \\ & && \text{dor y el denominador} \\ & && \text{por } -1. \\ &= \frac{a-5}{3a-4} - \frac{(-2a+5)}{3a-4} \\ &= \frac{(a-5) - (-2a+5)}{3a-4} && \text{Escribir como una} \\ & && \text{sola fracción.} \\ &= \frac{a-5+2a-5}{3a-4} && \text{Eliminar los paréntesis} \\ & && \text{en el numerador.} \\ &= \frac{3a-10}{3a-4} && \text{Reducir términos} \\ & && \text{semejantes en el} \\ & && \text{numerador.} \quad \star\end{aligned}$$

EJEMPLO 8 Sume $\frac{3}{x^2+5x+6} + \frac{1}{3x^2+8x-3}$.

Solución
$$\frac{3}{x^2+5x+6} + \frac{1}{3x^2+8x-3} = \frac{3}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(3x-1)(x+3)}$$

El mcd es $(x+2)(x+3)(3x-1)$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{3x-1}{3x-1} \cdot \frac{3}{(x+2)(x+3)} + \frac{1}{(3x-1)(x+3)} \cdot \frac{x+2}{x+2} \\
&= \frac{9x-3}{(3x-1)(x+2)(x+3)} + \frac{x+2}{(3x-1)(x+2)(x+3)} \\
&= \frac{(9x-3) + (x+2)}{(3x-1)(x+2)(x+3)} \\
&= \frac{9x-3+x+2}{(3x-1)(x+2)(x+3)} \\
&= \frac{10x-1}{(3x-1)(x+2)(x+3)}
\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 55



EJEMPLO 9 Reste $\frac{5}{x^2 - 5x} - \frac{x}{5x - 25}$.

Solución $\frac{5}{x^2 - 5x} - \frac{x}{5x - 25} = \frac{5}{x(x-5)} - \frac{x}{5(x-5)}$

El mcd es $5x(x-5)$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{5}{5} \cdot \frac{5}{x(x-5)} - \frac{x}{5(x-5)} \cdot \frac{x}{x} \\
&= \frac{25}{5x(x-5)} - \frac{x^2}{5x(x-5)} \\
&= \frac{25 - x^2}{5x(x-5)} \\
&= \frac{(5-x)(5+x)}{5x(x-5)} \\
&= \frac{-1(x-5)(x+5)}{5x(x-5)} \\
&= \frac{-1(\cancel{x-5})(x+5)}{5x(\cancel{x-5})} \\
&= \frac{-1(x+5)}{5x} \quad \text{o bien} \quad -\frac{x+5}{5x}
\end{aligned}$$

Factorizar el numerador.

$$5 - x = -1(x - 5)$$

Simplificar.



CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Un error común en un problema de suma o resta es sumar o restar los numeradores y los denominadores. Aquí está un ejemplo de ello.

CORRECTO

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} + \frac{x}{1} &= \frac{1}{x} + \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{x} \\
&= \frac{1}{x} + \frac{x^2}{x} \\
&= \frac{1+x^2}{x} \quad \text{o bien} \quad \frac{x^2+1}{x}
\end{aligned}$$

INCORRECTO

$$\begin{aligned}
\cancel{\frac{1}{x}} + \cancel{\frac{x}{1}} &\neq \frac{1+x}{x+1} \\
\cancel{\frac{1}{x}} - \cancel{\frac{x}{1}} &\neq \frac{1-x}{x-1}
\end{aligned}$$

(continúa en la página siguiente)

Recuerde que para sumar o restar fracciones primero debe tener un denominador común. Después sume o reste los numeradores conservando el denominador común.

Otro error común es tratar un problema de suma o resta como un problema de multiplicación. Puede dividir entre los factores comunes cuando se *multipliquen* fracciones, no cuando se sumen o resten.

CORRECTO

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1} = \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \frac{\cancel{x}}{1} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

INCORRECTO

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{1} = \frac{1}{\cancel{x}} + \frac{\cancel{x}}{1} = 1 + 1 = 2$$

Conjunto de ejercicios 6.4

Ejercicios conceptuales

1. Cuando suma o resta fracciones con denominadores no comunes, ¿cómo puede determinar por cuál factor debe multiplicar cada denominador para obtener el mcd?
2. Cuando multiplica tanto el numerador como el denominador de una fracción por los factores necesarios para obtener el mcd, ¿por qué no cambia el valor de la fracción?
3. **a)** Explique con sus propias palabras un procedimiento paso a paso para sumar o restar dos expresiones racionales que tienen denominadores diferentes.
b) Utilice el procedimiento descrito en la parte **a)**, para sumar

$$\frac{x}{x^2 - x - 6} + \frac{3}{x^2 - 4}.$$
4. Explique cómo sumar o restar fracciones cuyos denominadores son opuestos. Proporcione un ejemplo.
5. Considere $\frac{y}{4z} + \frac{5}{6z^2}$
a) ¿Cuál es el mcd?
b) Realice la operación que se indica.
c) Si al sumar, por error utiliza $24z^2$ en lugar del mcd, ¿aun así podría obtener la respuesta correcta? Explique.
6. ¿Utilizaría el mcd para realizar las operaciones siguientes? Explique.
a) $\frac{3}{x+3} - \frac{4}{x} + \frac{5}{3}$
b) $\frac{1}{x+2} \cdot \frac{5}{x}$
c) $x + \frac{2}{3}$
d) $\frac{5}{x^2 - 9} \div \frac{2}{x - 3}$

Práctica de habilidades

Sume o reste.

7. $\frac{1}{4x} + \frac{3}{x}$

8. $\frac{1}{4x} + \frac{1}{x}$

9. $\frac{5}{x^2} + \frac{3}{2x}$

10. $2 - \frac{1}{x^2}$

11. $3 + \frac{5}{x}$

12. $\frac{5}{6y} + \frac{3}{5y^2}$

13. $\frac{2}{x^2} + \frac{3}{5x}$

14. $\frac{3}{x} - \frac{5}{x^2}$

15. $\frac{7}{4x^2y} + \frac{3}{5xy^2}$

16. $\frac{5}{12x^4y} - \frac{1}{5x^2y^3}$

17. $3y + \frac{x}{y}$

18. $x + \frac{x}{y}$

19. $\frac{3a-1}{2a} + \frac{2}{3a}$

20. $\frac{3}{n} + 5$

21. $\frac{4x}{y} + \frac{2y}{xy}$

22. $\frac{3}{5p} - \frac{5}{2p^2}$

23. $\frac{4}{b} - \frac{4}{5a^2}$

24. $\frac{x-3}{x} - \frac{1}{4x}$

25. $\frac{4}{x} + \frac{7}{x-3}$

26. $6 - \frac{3}{x-3}$

27. $\frac{9}{p+3} + \frac{2}{p}$

28. $\frac{a}{a+b} + \frac{a-b}{a}$

29. $\frac{5}{6d} - \frac{d}{3d+5}$

30. $\frac{2}{x-3} - \frac{4}{x-1}$

33. $\frac{9}{x+7} - \frac{5}{-x-7}$

36. $\frac{4}{y-1} + \frac{3}{y+1}$

39. $\frac{5}{6n+3} - \frac{4}{n}$

42. $\frac{5k}{4k-8} - \frac{k}{k+2}$

45. $\frac{x+2}{x^2-4} - \frac{2}{x+2}$

47. $\frac{3r+2}{r^2-10r+24} - \frac{2}{r-6}$

49. $\frac{x^2}{x^2+2x-8} - \frac{x-4}{x+4}$

51. $\frac{x-3}{x^2+10x+25} + \frac{x-3}{x+5}$

53. $\frac{5}{a^2-9a+8} - \frac{3}{a^2-6a-16}$

55. $\frac{2}{x^2+6x+9} + \frac{3}{x^2+x-6}$

57. $\frac{x}{2x^2+7x+3} - \frac{3}{3x^2+7x-6}$

59. $\frac{x}{4x^2+11x+6} - \frac{2}{8x^2+2x-3}$

61. $\frac{3w+12}{w^2+w-12} - \frac{2}{w-3}$

63. $\frac{3r}{2r^2-10r+12} + \frac{3}{r-2}$

31. $\frac{4}{p-3} + \frac{2}{3-p}$

34. $\frac{6}{7x-1} - \frac{5}{1-7x}$

37. $\frac{x+5}{x-5} - \frac{x-5}{x+5}$

40. $\frac{x}{4x-4} - \frac{1}{3x}$

43. $\frac{z}{z^2-16} + \frac{4}{z+4}$

32. $\frac{3}{n-5} - \frac{1}{5-n}$

35. $\frac{6}{a-2} + \frac{a}{2a-4}$

38. $\frac{x+7}{x+3} - \frac{x-3}{x+7}$

41. $\frac{3}{2w+10} + \frac{5}{w+2}$

44. $\frac{5}{(x+4)^2} + \frac{2}{x+4}$

46. $\frac{3}{(x-2)(x+3)} + \frac{5}{(x+2)(x+3)}$

48. $\frac{x+3}{x^2-3x-10} - \frac{2}{x-5}$

50. $\frac{x+1}{x^2-4x+4} - \frac{x+1}{x-2}$

52. $\frac{x}{x^2-xy} - \frac{y}{xy-x^2}$

54. $\frac{3}{a^2+2a-15} - \frac{1}{a^2-9}$

56. $\frac{x}{2x^2+7x-4} + \frac{2}{x^2-x-20}$

58. $\frac{x}{6x^2+7x+2} + \frac{5}{2x^2-3x-2}$

60. $\frac{x}{5x^2-9x-2} - \frac{2}{3x^2-7x+2}$

62. $\frac{5x+10}{x^2-5x-14} - \frac{4}{x-7}$

64. $\frac{6m}{3m^2-24m+48} - \frac{2}{m-4}$

Solución de problemas

¿Para qué valor(es) de x está definida cada expresión?

65. $\frac{2}{x} + 6$

67. $\frac{5}{x-4} + \frac{7}{x+6}$

66. $\frac{2}{x-1} - \frac{3}{x}$

68. $\frac{4}{x^2-9} - \frac{1}{x+3}$

Suma o resta. Trate cada símbolo desconocido como si fuesen las variables.

69. $\frac{3}{\Delta-2} - \frac{1}{2-\Delta}$

70. $\frac{\Delta}{2\Delta^2+7\Delta-4} + \frac{2}{\Delta^2-\Delta-20}$

Problemas de reto

¿Bajo qué condiciones está definida cada expresión? Explique sus respuestas.

71. $\frac{5}{a+b} + \frac{3}{a}$

72. $\frac{x+2}{x+5y} - \frac{y-3}{2x}$

Realice cada operación que se indica.

73. $\frac{x}{x^2-9} + \frac{3x}{x+3} + \frac{3x^2-8x}{9-x^2}$

74. $\frac{5x}{x^2+x-6} + \frac{x}{x+3} - \frac{2}{x-2}$

75. $\frac{x+6}{4-x^2} - \frac{x+3}{x+2} + \frac{x-3}{2-x}$

76. $\frac{3x-1}{x+2} + \frac{x}{x-3} - \frac{4}{2x+3}$

77. $\frac{2}{x^2-x-6} + \frac{3}{x^2-2x-3} + \frac{1}{x^2+3x+2}$

78. $\frac{3x}{x^2-4} + \frac{4}{x^3+8}$



Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan el ejercicio 79.

79. a) Como grupo, determinen el mcd de

$$\frac{x+3y}{x^2+3xy+2y^2} + \frac{y-x}{2x^2+3xy+y^2}$$

- b) Como grupo, realicen la operación que se indica, pero no simplifiquen su respuesta.
 c) Como grupo, simplifiquen su respuesta.
 d) Miembro 1 del grupo: sustituya 2 por x y 1 por y en la fracción de la izquierda en la parte a) y evalúe.
 e) Miembro 2 del grupo: sustituya 2 por x y 1 por y en la fracción de la derecha en la parte a) y evalúe.

- f) Miembro 3 del grupo: sume las fracciones numéricas que se encontraron en las partes d) y e).
 g) En forma individual, sustituya 2 por x y 1 por y en las expresiones obtenidas en la parte b) y evalúe.
 h) De forma individual, sustituya 2 por x y 1 por y en la expresión que obtuvo en la parte c), evalúe y compare sus respuestas.
 i) En grupo, analicen lo que descubrieron con base en esta actividad.
 j) ¿Cree que sus resultados habrían sido similares para cualesquiera números sustituidos por x y y (para los que el denominador no es 0)? ¿Por qué?

Ejercicios de repaso acumulativo

- [2.6] 80. **White Pass Railroad** es una estrecha vía que atraviesa lentamente las montañas de Alaska. Si el tren viaja a 22 millas en 0.8 horas, ¿cuánto tardará en recorrer 42 millas? Suponga que el tren viaja con la misma rapidez durante todo el viaje.
 [2.7] 81. Resuelva la desigualdad $3(x-2) + 2 < 4(x+1)$ y grafique la solución en una recta numérica.

[4.6] 82. Divida $(8x^2 + 6x - 13) \div (2x + 3)$.

[6.2] 83. Multiplique $\frac{x^2+xy-6y^2}{x^2-xy-2y^2} \cdot \frac{y^2-x^2}{x^2+2xy-3y^2}$.

6.5 FRACCIONES COMPLEJAS



- 1 Simplificar fracciones complejas por medio de reducción de términos.
- 2 Simplificar fracciones complejas, multiplicando primero para eliminar fracciones.

1 Simplificar fracciones complejas por medio de reducción de términos

Una **fracción compleja** es aquella que tiene una fracción en su numerador o en su denominador, o en ambos.

Ejemplos de fracciones complejas

$$\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{2x}} \quad \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x}{x+1}} \quad \frac{\frac{x}{y}}{\frac{a+b}{a-b}}$$

Numerador de la fracción compleja $\left\{ \frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{a+b}{a}} \right\}$ ← Línea principal de la fracción.

Denominador de la fracción compleja $\left\{ \frac{\frac{a+b}{a}}{\frac{a+b}{a}} \right\}$

La expresión sobre la línea principal de la fracción es el numerador, y la que está debajo es el denominador de la fracción compleja.

Existen dos métodos para simplificar fracciones complejas. El primero refuerza muchos de los conceptos utilizados en este capítulo, ya que en ocasiones hay que sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones más simples cuando simplificamos la fracción compleja. Muchos estudiantes prefieren utilizar el segundo método, ya que la respuesta puede obtenerse de manera más rápida. Daremos dos ejemplos utilizando el primer método y luego resolveremos tres ejemplos con el segundo método.

Método 1—Para simplificar una fracción compleja reduciendo términos

1. Sume o reste las fracciones en el numerador y en el denominador de la fracción compleja para obtener fracciones sencillas, tanto en el numerador como en el denominador.
2. Obtenga el inverso del denominador de la fracción compleja y multiplíquelo por el numerador.
3. Si es posible, simplifique posteriormente.

EJEMPLO 1 Simplifique $\frac{\frac{ab^2}{c^3}}{\frac{a}{bc^2}}$.

Solución Como tanto el numerador como el denominador ya son fracciones sencillas, omitimos el paso 1 e iniciamos con el paso 2. Cuando obtenemos el inverso del denominador de la fracción compleja y lo multiplicamos por el numerador, obtenemos lo siguiente.

$$\frac{\frac{ab^2}{c^3}}{\frac{a}{bc^2}} = \frac{ab^2}{\cancel{c^3}^c} \cdot \frac{bc^{\cancel{2}^1}}{\cancel{a}^a} = \frac{b^3}{c}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 11

Por tanto, la expresión se simplifica a $\frac{b^3}{c}$.



EJEMPLO 2

Simplifique $\frac{a + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{a}}$.

Solución

Expresar tanto el numerador como el denominador de la fracción compleja como fracciones sencillas. El mcd del numerador es x y el mcd del denominador es a .

$$\frac{a + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{a}} = \frac{\frac{x}{x} \cdot a + \frac{1}{x}}{\frac{a}{a} \cdot x + \frac{1}{a}} = \frac{\frac{ax}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{ax}{a} + \frac{1}{a}} = \frac{\frac{ax + 1}{x}}{\frac{ax + 1}{a}}$$

Ahora calcule el inverso del denominador y multiplique el numerador por él.

$$= \frac{ax + 1}{x} \cdot \frac{a}{ax + 1} = \frac{a}{x}$$



En el ejemplo 4 de la siguiente página volveremos a resolver el ejemplo 2. Sin embargo, se hará por medio del método 2. La mayoría de los estudiantes coincidirán en que el método 2 es más sencillo de usar en problemas de este tipo, en donde el numerador o el denominador consisten en una suma o diferencia de términos. Aquí ilustramos el ejemplo 2 para mostrarle que el método 1 funciona para problemas de este tipo, y le proporcionamos más práctica con el método 1.

2 Simplificar fracciones complejas, multiplicando primero para eliminar fracciones

Aquí está el segundo método para simplificar fracciones complejas.

Método 2—Para simplificar una fracción compleja multiplicando primero

1. Determine el mínimo común denominador de *todos* los denominadores que aparecen en la fracción compleja.
2. Multiplique el numerador y el denominador de la fracción compleja por el mcd que se determinó en el paso 1.
3. Simplifique cuando sea posible.

EJEMPLO 3

Simplifique $\frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{5} - \frac{1}{3}}$.

Solución

Los denominadores en la fracción compleja son 3 y 5. El mcd de 3 y 5 es 15. Así que 15 es el mcd de la fracción compleja. Multiplique el numerador y el denominador de la fracción compleja por 15.

$$\frac{\frac{1}{3} + \frac{4}{5}}{\frac{4}{5} - \frac{1}{3}} = \frac{15}{15} \cdot \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\right)}{\left(\frac{4}{5} - \frac{1}{3}\right)} = \frac{15\left(\frac{1}{3}\right) + 15\left(\frac{4}{5}\right)}{15\left(\frac{4}{5}\right) - 15\left(\frac{1}{3}\right)}$$

Ahora simplifique.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 9

$$= \frac{5 + 12}{12 - 5} = \frac{17}{7}$$



Ahora volveremos a resolver el ejemplo 2, por medio del método 2.

EJEMPLO 4

Simplifique $\frac{a + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{a}}$.

Solución

Los denominadores en la fracción compleja son x y a . Por tanto, el mcd de la fracción compleja es ax . Multiplique tanto el numerador como el denominador de la fracción compleja por ax .

$$\begin{aligned} \frac{a + \frac{1}{x}}{x + \frac{1}{a}} &= \frac{ax}{ax} \cdot \frac{\left(a + \frac{1}{x}\right)}{\left(x + \frac{1}{a}\right)} = \frac{a^2x + a}{ax^2 + x} \\ &= \frac{a(ax + 1)}{x(ax + 1)} = \frac{a}{x} \end{aligned}$$



Observe que las respuestas a los ejemplos 2 y 4 son iguales.

EJEMPLO 5

Simplifique $\frac{x}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}$.

Solución

Los denominadores en la fracción compleja son x y y . Por tanto, el mcd de la fracción compleja es xy . Multiplique el numerador y el denominador de la fracción compleja por xy .

$$\begin{aligned} \frac{x}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} &= \frac{xy}{xy} \cdot \frac{x}{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)} \\ &= \frac{x^2y}{xy\left(\frac{1}{x}\right) + xy\left(\frac{1}{y}\right)} \\ &= \frac{x^2y}{y + x} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 17



Cuando se le pida simplificar una fracción compleja, puede utilizar cualquiera de los métodos, a menos que su profesor le pida utilizar un método específico. Lea la siguiente Sugerencia.

SUGERENCIA

Hemos presentado dos métodos para la simplificación de fracciones complejas. ¿Cuál método debe utilizar? Aunque se puede utilizar cualquiera de ellos, la mayoría de los estudiantes prefieren usar el método 1 cuando el numerador y el denominador constan de un solo término, como en el ejemplo 1. Cuando la fracción compleja tiene una suma o diferencia de expresiones en el numerador o el denominador, como en los ejemplos 2, 3, 4 o 5, la mayoría prefieren utilizar el método 2.

Conjunto de ejercicios 6.5

Ejercicios conceptuales

- ¿Qué es una fracción compleja?
- ¿Cuál es el numerador y cuál el denominador de cada fracción compleja?

$$\text{a) } \frac{5}{x^2 + 5x + 6} \quad \text{b) } \frac{\frac{5}{3}}{x^2 + 5x + 6}$$

- ¿Cuál es el numerador y cuál el denominador de cada fracción compleja?

$$\text{a) } \frac{\frac{x+3}{4}}{x^2 + 5x + 6} \quad \text{b) } \frac{\frac{1}{2y} + x}{\frac{3}{y} + x}$$

- Seleccione el método que prefiera para simplificar fracciones complejas. Luego escriba con sus propias palabras un procedimiento paso a paso para la simplificación de fracciones complejas utilizando ese método.
 - Por medio del procedimiento que escribió en la parte a), simplifique la fracción compleja siguiente.

$$\frac{\frac{2}{x} - \frac{3}{y}}{x + \frac{1}{y}}$$

Práctica de habilidades

Simplifique.

$$5. \frac{4 + \frac{2}{3}}{2 + \frac{1}{3}}$$

$$6. \frac{3 + \frac{4}{5}}{1 - \frac{9}{16}}$$

$$7. \frac{2 + \frac{3}{8}}{1 + \frac{1}{3}}$$

$$8. \frac{\frac{1}{4} + \frac{5}{6}}{\frac{2}{3} + \frac{3}{5}}$$

$$9. \frac{\frac{2}{7} - \frac{1}{4}}{6 - \frac{2}{3}}$$

$$10. \frac{1 - \frac{x}{y}}{x}$$

$$11. \frac{\frac{xy^2}{9}}{\frac{3}{x^2}}$$

$$12. \frac{\frac{12a}{b^3}}{\frac{b^2}{4}}$$

$$13. \frac{\frac{6a^2b}{5}}{\frac{9ac^2}{b^2}}$$

$$14. \frac{\frac{36x^4}{5y^4z^5}}{\frac{9xy^2}{15z^5}}$$

$$15. \frac{\frac{a - \frac{a}{b}}{1 + a}}{b}$$

$$16. \frac{a + \frac{1}{b}}{\frac{a}{b}}$$

$$17. \frac{\frac{9}{x} + \frac{3}{x^2}}{3 + \frac{1}{x}}$$

$$18. \frac{\frac{3}{a} + \frac{1}{2a}}{a + \frac{a}{2}}$$

$$19. \frac{5 - \frac{1}{x}}{4 - \frac{1}{x}}$$

$$20. \frac{\frac{x}{x-y}}{\frac{x^2}{y}}$$

$$21. \frac{\frac{m}{n} - \frac{n}{m}}{\frac{m+n}{n}}$$

$$22. \frac{1}{\frac{1}{x} + y}$$

$$23. \frac{\frac{a^2}{b} - b}{\frac{b^2}{a} - a}$$

$$24. \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}}{3 + \frac{1}{x^2}}$$

$$25. \frac{5 - \frac{a}{b}}{\frac{a}{b} - 5}$$

$$26. \frac{\frac{x}{y} - 2}{\frac{-x}{y} + 2}$$

$$27. \frac{\frac{a^2 - b^2}{a}}{\frac{a+b}{a^3}}$$

$$28. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{ab}$$

$$29. \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}$$

$$30. \frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

$$31. \frac{\frac{a}{b} + \frac{1}{a}}{\frac{b}{a} + \frac{1}{a}}$$

$$32. \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a}}$$

$$33. \frac{\frac{1}{xy}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}}$$

$$34. \frac{\frac{4}{x^2} + \frac{4}{x}}{\frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}}$$

$$35. \frac{\frac{3}{a} + \frac{3}{a^2}}{\frac{3}{b} + \frac{3}{b^2}}$$

$$36. \frac{\frac{x}{y} - \frac{1}{x}}{\frac{y}{x} + \frac{1}{y}}$$

Solución de problemas

Para las fracciones complejas en los ejercicios 37 al 40,

- Determine cuál de los dos métodos estudiados en esta sección utilizaría para simplificar la fracción. Explique por qué.
- Simplifique por medio del método que seleccionó en la parte a).
- Simplifique por medio del método que no seleccionó en la parte a). Si sus respuestas a las partes b) y c) no son las mismas, explique por qué.

$$37. \frac{5 + \frac{3}{5}}{\frac{1}{8} - 4}$$

$$38. \frac{\frac{x+y}{x^3} - \frac{1}{x}}{\frac{x-y}{x^5} + 5}$$

$$39. \frac{\frac{x-y}{x+y} + \frac{3}{x+y}}{2 - \frac{7}{x+y}}$$

$$40. \frac{\frac{25}{x-y} + \frac{4}{x+y}}{\frac{5}{x-y} - \frac{3}{x+y}}$$

En los ejercicios 41 y 42, **a)** escriba la fracción compleja, y **b)** simplifíquela.

- El numerador de la fracción compleja consta de un término: 5 se divide entre $12x$. El denominador de la fracción compleja consta de dos términos: 4 dividido entre $3x$ que se resta de 8 dividido entre x^2 .
- El numerador de la fracción compleja consta de dos términos: 3 dividido entre $2x$ que se resta de 6 dividido entre x . El denominador de la fracción compleja consta de dos términos: la suma de x y la cantidad 1 dividida entre x .

Simplifique. (Sugerencia: consulte la sección 4.2, que analiza los exponentes negativos.)

$$43. \frac{x^{-1} + y^{-1}}{2}$$

$$44. \frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1}}$$

$$45. \frac{x^{-1} + y^{-1}}{x^{-1}y^{-1}}$$

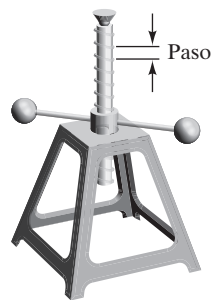
$$46. \frac{x^{-2} - y^{-2}}{y^{-1} - x^{-1}}$$

Problemas de reto

47. La eficiencia de un gato mecánico, E , se expresa por medio de la fórmula $E = \frac{\frac{1}{2}h}{h + \frac{1}{2}}$, donde h se determina por el paso de la rosca del gato. Determine la eficiencia de un gato, si h es

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{4}{5}$



Simplifique.

48.
$$\frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{x}{y} + y}$$

49.
$$\frac{\frac{a}{b} + b - \frac{1}{a}}{\frac{a}{b^2} - \frac{b}{a} + \frac{1}{a^2}}$$

50.
$$\frac{x}{1 + \frac{x}{1 + x}}$$

Ejercicios de repaso acumulativo

- [2.5] 51. Resuelva la ecuación $2x - 8(5 - x) = 9x - 3(x + 2)$.

- [4.4] 52. ¿Qué es un polinomio?

- [5.3] 53. Factorice $x^2 - 13x + 42$.

- [6.4] 54. Reste $\frac{x}{3x^2 + 17x - 6} - \frac{2}{x^2 + 3x - 18}$.

6.6 SOLUCIÓN DE ECUACIONES RACIONALES



- 1 Solucionar ecuaciones racionales con denominadores enteros.
- 2 Solucionar ecuaciones racionales en donde una variable aparece en el denominador.

1 Solucionar ecuaciones racionales con denominadores enteros

En las secciones 6.1 a 6.5 nos enfocamos a cómo sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones racionales; ahora estamos preparados para resolverlas. Una **ecuación racional** es aquella que tiene una o más expresiones racionales (o fraccionales). Una expresión racional puede ser una que tenga coeficientes racionales, como $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x = 8$ o bien $\frac{x}{2} + \frac{3x}{5} = 8$, o una que tenga términos racionales con una variable en el denominador, como $\frac{3}{x-2} = 5$. En las secciones 4.4 y 4.5 resolvimos ecuaciones lineales con coeficientes racionales.

En esta sección haremos énfasis en la solución de ecuaciones racionales en donde aparece una variable en un denominador. El siguiente procedimiento que utilizaremos, en esta sección, para resolver ecuaciones racionales es muy similar al procedimiento que utilizamos en el capítulo 2.

Para resolver ecuaciones racionales

1. Determine el mínimo común denominador (mcd) de todas las fracciones en la ecuación.
2. Multiplique **ambos** lados de la ecuación por el mcd. **Esto tendrá como resultado que todos los términos en la ecuación sean multiplicados por el mcd.**
3. Elimine todos los paréntesis, si los hay, y reduzca los términos semejantes en cada lado de la ecuación.
4. Resuelva la ecuación por medio de las propiedades analizadas en los capítulos anteriores.
5. Compruebe su solución en la ecuación *original*.

El propósito de multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd (paso 2) es eliminar todas las fracciones de la ecuación. Después de que ambos lados de la ecuación se multiplican por el mcd, la ecuación resultante no debe tener fracciones. Omitiremos algunas de las comprobaciones para ahorrar espacio.

Antes de resolver ecuaciones racionales en donde una variable aparece en un denominador, revisaremos cómo resolver ecuaciones con coeficientes racionales. Los ejemplos 1 y 2 ilustran el procedimiento.

EJEMPLO 1 Despeje t de $\frac{t}{4} - \frac{t}{5} = 1$.

Solución El mcd de 4 y 5 es 20. Multiplique ambos lados de la ecuación por 20.

$$\frac{t}{4} - \frac{t}{5} = 1$$

$$20\left(\frac{t}{4} - \frac{t}{5}\right) = 20 \cdot 1 \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, 20.}$$

$$20\left(\frac{t}{4}\right) - 20\left(\frac{t}{5}\right) = 20 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$5t - 4t = 20$$

$$t = 20$$

Comprobación $\frac{t}{4} - \frac{t}{5} = 1$

$$\frac{20}{4} - \frac{20}{5} \stackrel{?}{=} 1$$

$$5 - 4 \stackrel{?}{=} 1$$

$$1 = 1 \quad \text{Verdadero.}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 13**

EJEMPLO 2 Resuelva $\frac{x-5}{30} = \frac{4}{5} - \frac{x-1}{10}$.

Solución El mínimo común denominador es 30. Multiplique ambos lados de la ecuación por 30.

$$\frac{x-5}{30} = \frac{4}{5} - \frac{x-1}{10}$$

$$30\left(\frac{x-5}{30}\right) = 30\left(\frac{4}{5} - \frac{x-1}{10}\right) \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, 30.}$$

$$x-5 = 30\left(\frac{4}{5}\right) - 30\left(\frac{x-1}{10}\right) \quad \text{Propiedad distributiva.}$$



$$x - 5 = 24 - 3(x - 1)$$

$$x - 5 = 24 - 3x + 3$$

Propiedad distributiva.

$$x - 5 = -3x + 27$$

Reducir términos semejantes.

$$4x - 5 = 27$$

Se sumó 3x a ambos lados.

$$4x = 32$$

Se sumó 5 a ambos lados.

$$x = 8$$

Ambos lados se dividieron entre 4.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 27

Una comprobación mostrará que la respuesta es 8. Sugerimos que compruebe esta respuesta ahora, para ganar práctica en la verificación de respuestas. 

En el ejemplo 2, la ecuación también podría haber sido escrita como

$$\frac{1}{30}(x - 5) = \frac{4}{5} - \frac{1}{10}(x - 1).$$

Para ejemplos adicionales de resolución de ecuaciones racionales con enteros en los denominadores, revise las secciones 2.4 y 2.5.

2 Solucionar ecuaciones racionales en donde una variable aparece en el denominador

Ahora estamos preparados para resolver ecuaciones racionales en donde una variable aparece en el denominador. Al resolver este tipo de ecuaciones *debe* comprobar su respuesta. ¡Vea la siguiente advertencia!

Advertencia Siempre que una variable aparezca en algún denominador de una ecuación racional, es necesario comprobar su respuesta en la ecuación original. Si la respuesta obtenida hace que algún denominador sea igual a cero, ese valor no es una solución de la ecuación. Tales valores se denominan **raíces extrañas** o **soluciones extrañas**.

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $3 - \frac{4}{x} = \frac{5}{2}$.

Solución Multiplique ambos lados de la ecuación por el mcd, $2x$.

$$2x \left(3 - \frac{4}{x} \right) = \left(\frac{5}{2} \right) \cdot 2x \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, } 2x.$$

$$2x(3) - 2x \left(\frac{4}{x} \right) = \left(\frac{5}{2} \right) \cdot 2x \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$6x - 8 = 5x \quad 5x \text{ se restó de ambos lados.}$$

$$x - 8 = 0 \quad \text{Se sumó 8 a ambos lados.}$$

$$x = 8$$

Comprobación $3 - \frac{4}{x} = \frac{5}{2}$

$$3 - \frac{4}{8} \stackrel{?}{=} \frac{5}{2}$$

$$3 - \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} \frac{5}{2}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{Verdadero.}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 51

Como 8 cumple, es la solución de la ecuación. 

EJEMPLO 4 Resuelva la ecuación $\frac{p-5}{p+3} = \frac{1}{5}$.

Solución El mcd es $5(p+3)$. Multiplique ambos lados de la ecuación por el mcd.

$$\begin{aligned} 5(p+3) \cdot \frac{(p-5)}{p+3} &= \frac{1}{5} \cdot 5(p+3) \\ 5(p-5) &= 1(p+3) \\ 5p-25 &= p+3 \\ 4p-25 &= 3 \\ 4p &= 28 \\ p &= 7 \end{aligned}$$

Una comprobación mostrará que 7 es la solución. 

En la sección 2.6 ilustramos que las proporciones de la forma

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

pueden multiplicarse en forma cruzada para obtener $a \cdot d = b \cdot c$. El ejemplo 4 es una proporción y también puede resolverse por medio de productos cruzados, como se hace en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Utilice productos cruzados para resolver la ecuación $\frac{6}{x+3} = \frac{5}{x-2}$.

Solución

$$\begin{aligned} \frac{6}{x+3} &= \frac{5}{x-2} \\ 6(x-2) &= 5(x+3) && \text{Productos cruzados.} \\ 6x-12 &= 5x+15 && \text{Propiedad distributiva.} \\ x-12 &= 15 && \text{Se restó } 5x \text{ de ambos lados.} \\ x &= 27 && \text{Se sumó } 12 \text{ a ambos lados.} \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 41**

Una comprobación mostrará que 27 es la solución de la ecuación. 

Ahora examinaremos algunos ejemplos que incluyen a ecuaciones cuadráticas. Recuerde que en la sección 5.6 vimos que las ecuaciones cuadráticas tienen la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en donde $a \neq 0$.

EJEMPLO 6 Resuelva la ecuación $x + \frac{12}{x} = -7$.

Solución

$$\begin{aligned} x \cdot \left(x + \frac{12}{x} \right) &= -7 \cdot x && \text{Multiplicar ambos lados por } x. \\ x(x) + \cancel{x} \left(\frac{12}{\cancel{x}} \right) &= -7x && \text{Propiedad distributiva.} \\ x^2 + 12 &= -7x \\ x^2 + 7x + 12 &= 0 && \text{Se sumó } 7x \text{ a ambos lados.} \\ (x+3)(x+4) &= 0 && \text{Factorizar.} \\ x+3=0 &\quad \text{o bien} \quad x+4=0 && \text{Propiedad del factor cero.} \\ x=-3 &\quad \quad \quad x=-4 \end{aligned}$$

Comprobación

$x = -3$

$$x + \frac{12}{x} = -7$$

$$-3 + \frac{12}{-3} \stackrel{?}{=} -7$$

$$-3 + (-4) \stackrel{?}{=} -7$$

$$-7 = -7$$

Verdadero.

$x = -4$

$$x + \frac{12}{x} = -7$$

$$-4 + \frac{12}{-4} \stackrel{?}{=} -7$$

$$-4 + (-3) \stackrel{?}{=} -7$$

$$-7 = -7$$

Verdadero.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 73Las soluciones son -3 y -4 .

EJEMPLO 7

Resuelva la ecuación $\frac{x^2 + x}{x - 6} = \frac{42}{x - 6}$.

Solución

Si intentamos resolver la ecuación por medio de productos cruzados, obtendremos una ecuación cúbica; resolveremos esta ecuación multiplicando ambos lados por el mcd, $x - 6$.

$$\frac{x^2 + x}{x - 6} = \frac{42}{x - 6}$$

$$\cancel{x - 6} \cdot \frac{x^2 + x}{\cancel{x - 6}} = \frac{42}{\cancel{x - 6}} \cdot \cancel{x - 6}$$
 Multiplicar ambos lados por el mcd, $x - 6$.

$$x^2 + x = 42$$

$$x^2 + x - 42 = 0$$

$$(x + 7)(x - 6) = 0$$

$$x + 7 = 0 \quad \text{o bien} \quad x - 6 = 0$$

$$x = -7$$

$$x = 6$$

Se restó 42 de ambos lados.

Factorizar.

Propiedad del factor cero.

Comprobación

$x = -7$

$$\frac{x^2 + x}{x - 6} = \frac{42}{x - 6}$$

$$\frac{(-7)^2 + (-7)}{-7 - 6} \stackrel{?}{=} \frac{42}{-7 - 6}$$

$$\frac{49 - 7}{-13} \stackrel{?}{=} \frac{42}{-13}$$

$$-\frac{42}{13} = -\frac{42}{13}$$

Verdadero.

$x = 6$

$$\frac{x^2 + x}{x - 6} = \frac{42}{x - 6}$$

$$\frac{6^2 + 6}{6 - 6} \stackrel{?}{=} \frac{42}{6 - 6}$$

$$\frac{42}{0} = \frac{42}{0}$$

Ya que el denominador es 0, y no podemos dividir entre 0, 6 no es una solución.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 47Puesto que $\frac{42}{0}$ no es un número real, 6 es una solución extraña. Por tanto, esta ecuación sólo tiene una solución, -7 .

SUGERENCIA

Recuerde, al resolver una ecuación racional en la que una variable aparezca en un denominador, debe comprobar *todas* sus respuestas para asegurarse que ninguna es una raíz extraña. Por lo regular, las raíces extrañas se pueden descubrir con rapidez. Si alguna de sus respuestas hace que algún denominador sea cero, esa respuesta es una raíz extraña y no es una solución verdadera.

Hablando en general, si ninguna de sus respuestas hace algún denominador igual a 0, y no ha cometido un error al resolver la ecuación, las respuestas que obtuvo al resolver la ecuación serán soluciones de la ecuación.

EJEMPLO 8 Resuelva la ecuación $\frac{5w}{w^2 - 4} + \frac{1}{w - 2} = \frac{4}{w + 2}$.

Solución Primero factorice $w^2 - 4$.

$$\frac{5w}{(w + 2)(w - 2)} + \frac{1}{w - 2} = \frac{4}{w + 2}$$

Multiplique ambos lados de la ecuación por el mcd, $(w + 2)(w - 2)$.

$$\begin{aligned} (w + 2)(w - 2) \left[\frac{5w}{(w + 2)(w - 2)} + \frac{1}{w - 2} \right] &= \frac{4}{w + 2} \cdot (w + 2)(w - 2) \\ (w + 2)(w - 2) \cdot \frac{5w}{(w + 2)(w - 2)} + (w + 2)(w - 2) \cdot \frac{1}{w - 2} &= \frac{4}{w + 2} \cdot (w + 2)(w - 2) \\ (w + 2)(w - 2) \cdot \frac{5w}{(w + 2)(w - 2)} + (w + 2)(w - 2) \cdot \frac{1}{w - 2} &= \frac{4}{w + 2} \cdot (w + 2)(w - 2) \\ 5w + (w + 2) &= 4(w - 2) \\ 6w + 2 &= 4w - 8 \\ 2w + 2 &= -8 \\ 2w &= -10 \\ w &= -5 \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 65**

Una comprobación mostrará que -5 es la solución de la ecuación.



SUGERENCIA

Algunos estudiantes confunden la suma y la resta de expresiones racionales con la resolución de ecuaciones racionales. Al sumar o restar expresiones racionales, debemos reescribir cada expresión con un denominador común. Al resolver una ecuación racional, multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mcd para eliminar las fracciones en la ecuación. Considere los siguientes dos problemas. Observe que el de la derecha es una ecuación, ya que tiene un signo de igual. Resolveremos ambos problemas. El mcd para ambos problemas es $x(x + 4)$.

Suma de expresiones racionales

$$\frac{x + 2}{x + 4} + \frac{3}{x}$$

Reescribimos cada fracción con el mcd, $x(x + 4)$.

$$\begin{aligned} &= \frac{x}{x} \cdot \frac{x + 2}{x + 4} + \frac{3}{x} \cdot \frac{x + 4}{x + 4} \\ &= \frac{x(x + 2)}{x(x + 4)} + \frac{3(x + 4)}{x(x + 4)} \\ &= \frac{x^2 + 2x}{x(x + 4)} + \frac{3x + 12}{x(x + 4)} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 3x + 12}{x(x + 4)} \\ &= \frac{x^2 + 5x + 12}{x(x + 4)} \end{aligned}$$

Solución de ecuaciones racionales

$$\frac{x + 2}{x + 4} = \frac{3}{x}$$

Eliminamos las fracciones al multiplicar ambos lados de la ecuación por el mcd, $x(x + 4)$.

$$\begin{aligned} (x)(x + 4) \left(\frac{x + 2}{x + 4} \right) &= \frac{3}{x} (x)(x + 4) \\ x(x + 2) &= 3(x + 4) \\ x^2 + 2x &= 3x + 12 \\ x^2 - x - 12 &= 0 \\ (x - 4)(x + 3) &= 0 \\ x - 4 = 0 \quad \text{o bien} \quad x + 3 = 0 \\ x = 4 \quad \quad \quad x = -3 \end{aligned}$$

(continúa en la página siguiente)

Los números 4 y -3 a la derecha cumplen la ecuación y, por tanto, son soluciones de la misma.

Observe que cuando sumamos o restamos expresiones racionales por lo regular finalizamos con una expresión algebraica. Al resolver una ecuación racional, la solución será un valor o valores numéricos. La ecuación de la derecha también podría haberse resuelto por medio de productos cruzados.

Conjunto de ejercicios 6.6

Ejercicios conceptuales

1. a) Con sus propias palabras, explique los pasos para resolver ecuaciones racionales.

- b) Con el procedimiento que escribió en la parte a), resuelva la ecuación $\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} = \frac{3x}{x^2-1}$.

2. a) Sin resolver las ecuaciones, determine si la respuesta a las dos ecuaciones siguientes serán iguales o diferentes. Explique su respuesta.

$$\frac{3}{x-2} + \frac{2}{x+2} = \frac{4x}{x^2-4}, \quad \frac{4x}{x^2-4} - \frac{2}{x+2} = \frac{3}{x-2}$$

- b) Determine la respuesta para las dos ecuaciones.

3. Considere los siguientes problemas.

Simplifique:

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} + \frac{1}{x-1}$$

Resuelva:

$$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = \frac{1}{x-1}$$

- a) Explique las diferencias entre los dos tipos de problemas.
b) Explique cómo resolvería cada problema para obtener la respuesta correcta.
c) Determine la respuesta correcta para cada problema.

4. Considere los siguientes problemas.

Simplifique:

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} + \frac{5}{2x+7}$$

Resuelva:

$$\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{5}{2x+7}$$

- a) Explique las diferencias entre los dos tipos de problemas.
b) Explique cómo resolvería cada problema para obtener la respuesta correcta.
c) Determine la respuesta correcta para cada problema.

5. ¿Bajo qué condiciones debe verificar si aparecen soluciones extrañas en las ecuaciones racionales?

6. ¿Cuál de los siguientes números, 3, 1 o 0 no puede ser una solución de la ecuación $3 - \frac{1}{x} = 4$? Explique.

7. ¿Cuál de los números siguientes, 0, 3 o 2, no puede ser una solución de la ecuación $\frac{3}{x-2} + 5x = 6$? Explique.

8. ¿Cuál de los números siguientes 0, -5 o 2, no puede ser una solución de la ecuación $4x - \frac{2}{x+5} = 3$? Explique.

En los ejercicios 9 al 12, indique si es necesario comprobar la solución obtenida para ver si es extraña. Explique su respuesta.

9. $\frac{4}{7} + \frac{x-2}{5} = 5$

10. $\frac{3}{x-2} + \frac{1}{x} = 6$

11. $\frac{2}{x+4} + 3 = 6$

12. $\frac{z}{3} + \frac{1}{z} = 6$

Práctica de habilidades

Resuelva cada ecuación y compruebe su solución. Vea los ejemplos 1 y 2.

13. $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$

14. $\frac{t}{5} - \frac{t}{6} = 4$

15. $\frac{r}{3} = \frac{r}{4} + \frac{1}{6}$

16. $\frac{n}{5} = \frac{n}{6} + \frac{1}{3}$

17. $\frac{z}{2} + 3 = \frac{z}{5}$

18. $\frac{3w}{5} - 6 = w$

19. $\frac{z}{6} + \frac{1}{3} = \frac{z}{5} - \frac{2}{3}$

20. $\frac{m-2}{3} = \frac{4}{3} + \frac{m}{6}$

21. $d + 1 = \frac{3}{2}d - 1$

22. $\frac{q}{5} + \frac{q}{2} = \frac{21}{10}$

23. $k + \frac{1}{6} = 2k - 4$

24. $\frac{p}{4} + \frac{1}{2} = \frac{p}{3} - \frac{1}{4}$

25. $\frac{n+6}{3} = \frac{2(n-8)}{4}$

28. $\frac{z+4}{6} = \frac{3}{2} - \frac{2z+2}{12}$

31. $\frac{d-3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{2d+1}{3} - \frac{32}{15}$

26. $\frac{3(x-6)}{5} = \frac{3(x+2)}{6}$

29. $\frac{-p+1}{4} + \frac{13}{20} = \frac{p}{5} - \frac{p-1}{2}$

32. $\frac{t+4}{5} = \frac{3}{8} + \frac{t+17}{40}$

27. $\frac{x-5}{15} = \frac{3}{5} - \frac{x-4}{10}$

30. $\frac{1}{10} - \frac{n+1}{6} = \frac{1}{5} - \frac{n+10}{15}$

Resuelva cada ecuación y compruebe su solución. Véanse los ejemplos 3 al 8.

33. $2 + \frac{3}{x} = \frac{11}{4}$

34. $3 - \frac{1}{x} = \frac{14}{5}$

35. $6 - \frac{3}{x} = \frac{9}{2}$

36. $5 + \frac{3}{z} = \frac{11}{2}$

37. $\frac{4}{n} - \frac{3}{2n} = \frac{1}{2}$

38. $\frac{5}{3x} + \frac{3}{x} = 1$

39. $\frac{x-1}{x-5} = \frac{4}{x-5}$

40. $\frac{2x+3}{x+2} = \frac{3}{2}$

41. $\frac{5}{a+3} = \frac{4}{a+1}$

42. $\frac{5}{x+2} = \frac{1}{x-4}$

43. $\frac{4}{y-3} = \frac{6}{y+3}$

44. $\frac{5}{-x-6} = \frac{2}{x}$

45. $\frac{2x-3}{x-4} = \frac{5}{x-4}$

46. $\frac{3}{x} + 4 = \frac{3}{x}$

47. $\frac{x^2}{x-4} = \frac{16}{x-4}$

48. $\frac{x^2}{x+5} = \frac{25}{x+5}$

49. $\frac{n+10}{n+2} = \frac{n+4}{n-3}$

50. $\frac{x-3}{x+1} = \frac{x-6}{x+5}$

51. $\frac{1}{3r} = \frac{r}{8r+3}$

52. $\frac{1}{2r} = \frac{r}{r+15}$

53. $\frac{k}{k+2} = \frac{3}{k-2}$

54. $\frac{3a-2}{2a+2} = \frac{3}{a-1}$

55. $\frac{3}{r} + r = \frac{19}{r}$

56. $a + \frac{3}{a} = \frac{12}{a}$

57. $x + \frac{20}{x} = -9$

58. $x - \frac{21}{x} = 4$

59. $\frac{3y-2}{y+1} = 4 - \frac{y+2}{y-1}$

60. $\frac{2b}{b+1} = 2 - \frac{5}{2b}$

61. $\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x-3} = \frac{-5}{x^2-9}$

62. $\frac{t-1}{t-5} - \frac{3}{4} = \frac{3}{t-5}$

63. $\frac{x}{x-3} + \frac{3}{2} = \frac{3}{x-3}$

64. $\frac{3x}{x^2-9} + \frac{1}{x-3} = \frac{3}{x+3}$

65. $\frac{3}{x-5} - \frac{4}{x+5} = \frac{11}{x^2-25}$

66. $\frac{2n^2-15}{n^2+n-6} = \frac{n+1}{n+3} + \frac{n-3}{n-2}$

67. $\frac{y}{2y+2} + \frac{2y-16}{4y+4} = \frac{y-3}{y+1}$

68. $\frac{3}{x+3} + \frac{5}{x+4} = \frac{12x+19}{x^2+7x+12}$

69. $\frac{1}{y-1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{y^2-1}$

70. $\frac{2y}{y+2} = \frac{y}{y+3} - \frac{3}{y^2+5y+6}$

71. $\frac{2t}{4t+4} + \frac{t}{2t+2} = \frac{2t-3}{t+1}$

72. $\frac{2}{x-2} - \frac{1}{x+1} = \frac{5}{x^2-x-2}$

Solución de problemas

En los ejercicios 73 al 78, determine la solución por observación. Explique cómo determinó su respuesta.

73. $\frac{3}{x-2} = \frac{x-2}{x-2}$

74. $\frac{1}{2} + \frac{x}{2} = \frac{5}{2}$

75. $\frac{x}{x-3} + \frac{x}{x-3} = 0$

76. $\frac{x}{2} + \frac{x}{2} = x$

77. $\frac{x-2}{3} + \frac{x-2}{3} = \frac{2x-4}{3}$

78. $\frac{2}{x} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x}$

79. **Óptica** Una fórmula que se utiliza con frecuencia en óptica es

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

en donde p representa la distancia del objeto a un espejo (o lente), q representa la distancia de la imagen al espejo (o lente) y f representa la longitud focal del espejo (o lente). Si un espejo tiene una longitud focal de 10 centímetros, ¿qué tan lejos del espejo estará la imagen cuando el objeto está a 30 centímetros del espejo?



Problemas de reto

80. a) Con base en el material presentado en el texto, explique por qué la ecuación $\frac{x^2}{x-3} = \frac{9}{x-3}$ no puede resolverse por medio de productos cruzados.

b) Resuelva la ecuación dada en la parte a).

81. Resuelva la ecuación $\frac{x-4}{x^2-2x} = \frac{-4}{x^2-4}$.

82. **Resistencia eléctrica** En electrónica, la resistencia total, R_T , de resistores conectados en un circuito en paralelo está determinada mediante la fórmula

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \cdots + \frac{1}{R_n}$$

donde $R_1, R_2, R_3, \dots, R_n$ son las resistencias de cada uno de los resistores (medidas en ohms) en el circuito.

a) Determine la resistencia total, si se conectan dos resistores en paralelo, uno de 200 ohms y otro de 300 ohms.

b) Si se conectan tres resistores idénticos para formar un circuito en paralelo, ¿cuál debe ser la resistencia de cada resistor si la resistencia total del circuito será de 300 ohms?

83. Una ecuación de la forma $\frac{a}{x} + 1 = \frac{a}{x}$, ¿puede tener como solución un número real, para cualquier número real a ? Explique su respuesta.



Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan el ejercicio 84.

84. a) Como grupo, analicen dos métodos diferentes que pueden utilizar para resolver la ecuación $\frac{x+3}{5} = \frac{x}{4}$.
- b) Miembro 1 del grupo: resuelva la ecuación por medio de la obtención de un denominador común.
Miembro 2 del grupo: resuelva la ecuación mediante productos cruzados.
Miembro 3 del grupo: compruebe los resultados de los miembros 1 y 2 del grupo.
- c) De forma individual, determine otra ecuación tomando el recíproco de cada término de la ecuación en la parte a). Compare sus resultados. ¿Cree que el recíproco de la respuesta que encontró en la parte b) será la solución de esta ecuación? Explique.
- d) De forma individual, resuelva la ecuación que se determinó en la parte c) y compruebe su respuesta. Compare su trabajo con el de los otros miembros del grupo. ¿La conclusión que hizo en la parte c) fue correcta? Explique.

e) Como grupo, resuelvan la ecuación $\frac{1}{x} + \frac{1}{3} = \frac{2}{x}$. Comprueben su resultado.

f) Como grupo, determinen otra ecuación tomando los recíprocos de cada término de la ecuación en la parte e). ¿Piensan que el recíproco de la respuesta que encontraron en la parte e) será la solución de esta ecuación? Expliquen.

g) De forma individual, resuelva la ecuación que determinó en la parte f) y compruebe su respuesta. Compare su trabajo con el de los otros miembros del grupo. ¿La conclusión que hizo su grupo en la parte f) fue correcta? Explique.

h) Como grupo, analicen la relación entre la solución a la ecuación $\frac{7}{x-9} = \frac{3}{x}$ y la solución a la ecuación $\frac{x-9}{7} = \frac{x}{3}$. Expliquen su respuesta.

Ejercicios de repaso acumulativo

- [3.3] 85. **Planes de internet** Un servicio de internet ofrece dos planes para sus clientes. Un plan incluye 5 horas de uso y cuesta \$7.95 al mes. Cada minuto adicional a partir de las 5 horas cuesta \$0.15. El segundo plan cuesta \$19.95 al mes y proporciona acceso ilimitado a internet. ¿Cuántas horas al mes tendría que utilizar internet Jake LaRue para hacer que el segundo plan sea menos caro?

- [3.4] 86. **Ángulos suplementarios** Dos ángulos son suplementarios si la suma de sus medidas es 180° . Determine los dos ángulos suplementarios si el ángulo más pequeño es 30° menor que la mitad del ángulo mayor.

87. **Llenado de un jacuzzi** ¿Cuánto tardará en llenarse un jacuzzi de 600 galones, si el agua entra al jacuzzi a una velocidad de 8 galones por minuto?

- [4.6] 88. Multiplique $(3.4 \times 10^{-5})(2 \times 10^7)$.



6.7 ECUACIONES RACIONALES: APLICACIONES Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS



- 1 Plantear y resolver aplicaciones que tienen expresiones racionales.
- 2 Plantear y resolver problemas de movimiento.
- 3 Plantear y resolver problemas de trabajo.

1 Plantear y resolver aplicaciones que tienen expresiones racionales

Muchas aplicaciones de álgebra incluyen expresiones racionales. Después de representar la aplicación como una ecuación, resolvemos la ecuación racional como lo hicimos en la sección 6.6.

El primer tipo de aplicación que consideraremos es un **problema geométrico**.

EJEMPLO 1 Una alfombra nueva Mary y Larry Armstrong están interesados en la compra de una alfombra cuya área es de 60 pies cuadrados. Determine la longitud y ancho, si el ancho es 5 pies menor que $\frac{3}{5}$ de la longitud; vea la figura 6.1.

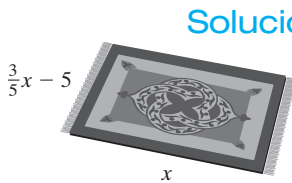


FIGURA 6.1

Solución Entender y traducir

Sea x = longitud

entonces $\frac{3}{5}x - 5$ = ancho

Área = longitud · ancho

$$60 = x\left(\frac{3}{5}x - 5\right)$$

Realizar los cálculos

$$60 = \frac{3}{5}x^2 - 5x$$

$$5(60) = 5\left(\frac{3}{5}x^2 - 5x\right) \quad \text{Multiplicar ambos lados por 5.}$$

$$300 = 3x^2 - 25x \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$0 = 3x^2 - 25x - 300 \quad \text{Restar 300 a ambos lados.}$$

$$\text{o } 3x^2 - 25x - 300 = 0$$

$$(3x + 20)(x - 15) = 0 \quad \text{Factorizar.}$$

$$3x + 20 = 0 \quad \text{o bien } x - 15 = 0 \quad \text{Propiedad del factor cero.}$$

$$3x = -20 \quad x = 15$$

$$x = -\frac{20}{3}$$

Comprobar y responder Como la longitud de un rectángulo no puede ser negativa, podemos eliminar $-\frac{20}{3}$ como una respuesta para nuestro problema.

$$\text{longitud} = x = 15 \text{ pies}$$

$$\text{ancho} = \frac{3}{5}(15) - 5 = 4 \text{ pies}$$

Comprobación

$$A = la$$

$$60 \stackrel{?}{=} 15(4)$$

$$60 = 60 \quad \text{Verdadero.}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 5**

Por tanto, la longitud es 15 pies y el ancho es 4 pies.



Ahora resolveremos un problema que expresa la relación entre dos números. Problemas como éste en ocasiones se conocen como *problemas numéricos*.

EJEMPLO 2 Recíprocos Un número es el triple de otro, la suma de sus recíprocos es $\frac{20}{9}$. Determine los números.

Solución

Entender y traducir

Sea x = primer número

entonces $3x$ = segundo número

El recíproco del primer número es $\frac{1}{x}$ y el recíproco del segundo número es $\frac{1}{3x}$. La suma de sus recíprocos es $\frac{20}{9}$; por tanto:

Realizar los cálculos

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{3x} = \frac{20}{9}$$

$$9x\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x}\right) = 9x\left(\frac{20}{9}\right) \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, } 9x.$$

$$9x\left(\frac{1}{x}\right) + 9x\left(\frac{1}{3x}\right) = 20x \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$9 + 3 = 20x$$

$$12 = 20x$$

$$\frac{12}{20} = x$$

$$\frac{3}{5} = x$$

Comprobación El primer número es $\frac{3}{5}$. Por tanto, el segundo número es $3x = 3\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{9}{5}$.

Ahora compruebe si la suma de los recíprocos es $\frac{20}{9}$. El recíproco de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$. El recíproco de $\frac{9}{5}$ es $\frac{5}{9}$. La suma de los recíprocos es

$$\frac{5}{3} + \frac{5}{9} = \frac{15}{9} + \frac{5}{9} = \frac{20}{9}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 11

Respuesta Como la suma de los recíprocos es $\frac{20}{9}$, los dos números son $\frac{3}{5}$ y $\frac{9}{5}$. 

2 Plantear y resolver problemas de movimiento

En el capítulo 3 analizamos **problemas de movimiento**. Recuerde que

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

Si despejamos el tiempo de esta ecuación, obtenemos

$$\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}} \quad \text{o bien} \quad t = \frac{d}{r}$$

Esta ecuación es útil al resolver problemas de movimiento cuando se conoce el tiempo total del recorrido para dos objetos o el tiempo de recorrido entre dos puntos.

EJEMPLO 3 Canotaje Cindy Kilborn vive cerca del río Colorado y le gusta recorrer en canoa una sección del río en donde la corriente no es muy fuerte. Un sábado ella estaba practicando y por un amigo supo que la corriente en el río era de 2 millas por hora. Si a Cindy le tomó el mismo tiempo recorrer 10 millas a favor de la corriente que 2 millas en contra de la corriente, determine la velocidad a la que Cindy iría en la canoa en aguas tranquilas.

Solución Entender y traducir



Sea r = la velocidad de la canoa en aguas tranquilas
entonces $r + 2$ = la velocidad de la canoa cuando se viaja con la corriente
y $r - 2$ = la velocidad de la canoa cuando se viaja en contra de la corriente

Dirección	Distancia	Velocidad	Tiempo
A favor de la corriente	10	$r + 2$	$\frac{10}{r + 2}$
Contra la corriente	2	$r - 2$	$\frac{2}{r - 2}$

Como el tiempo que tarda en recorrer 10 millas a favor de la corriente es el mismo que el tiempo en recorrer 2 millas en contra de la corriente, igualamos los tiempos y resolvemos la ecuación resultante.

tiempo a favor de la corriente = tiempo en contra de la corriente

$$\frac{10}{r + 2} = \frac{2}{r - 2}$$

Realizar los cálculos

$$\begin{aligned} 10(r - 2) &= 2(r + 2) && \text{Productos cruzados.} \\ 10r - 20 &= 2r + 4 \\ 8r &= 24 \\ r &= 3 \end{aligned}$$

Comprobar y responder Como esta ecuación racional tiene una variable en el denominador, se debe verificar la solución. Una comprobación mostrará que 3 satisface la ecuación. Por tanto, la canoa viajaría a 3 millas por hora en aguas tranquilas. 

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 15

EJEMPLO 4 Ruta de patrullaje El oficial De Wolf conduce su bicicleta todos los sábados por la mañana en el Parque Estatal Kahana Valley en Oahu, Hawai, como parte de su trabajo de patrullaje. Durante la primera parte del recorrido él pedalea principalmente colina arriba y su velocidad promedio es de 6 millas por hora. Después de cierto punto, viaja principalmente colina abajo y promedia 9 millas por hora. Si la distancia total que él recorre es de 30 millas y el tiempo total que conduce es de 4 horas, ¿cuánto tiempo viajó a cada velocidad?

Solución Entender y traducir

Sea d = distancia recorrida a 6 millas por hora
entonces $30 - d$ = distancia recorrida a 9 millas por hora



Dirección	Distancia	Velocidad	Tiempo
Colina arriba	d	6	$\frac{d}{6}$
Colina abajo	$30 - d$	9	$\frac{30 - d}{9}$

Persona	Distancia	Velocidad	Tiempo
Kimberly	d	16	$\frac{d}{16}$
Steve	d	5	$\frac{d}{5}$



Sabemos que Kimberly completó la maratón en 2.75 horas menos que el tiempo que hizo Steve. Por tanto, para hacer que los tiempos de Kimberly y de Steve sean iguales, necesitamos restar 2.75 horas del tiempo de Steve (o sumar 2.75 horas al tiempo de Kimberly; vea el párrafo después de este ejemplo). Restaremos 2.75 horas del tiempo de Steve y utilizamos la siguiente ecuación para resolver el problema.

$$\text{Tiempo de Kimberly} = \text{tiempo de Steve} - 2.75 \text{ horas}$$

$$\frac{d}{16} = \frac{d}{5} - 2.75$$

Realizar los cálculos

$$80\left(\frac{d}{16}\right) = 80\left(\frac{d}{5} - 2.75\right)$$

Multiplicar ambos lados por el mcd, 80.

$$5d = 80\left(\frac{d}{5}\right) - 80(2.75)$$

Propiedad distributiva.

$$5d = 16d - 220$$

$$-11d = -220$$

$$d = 20$$

Comprobar y responder La distancia desde el punto inicial al punto final de la maratón parece ser 20 kilómetros. Para comprobar esta respuesta determinaremos los tiempos que tardaron Kimberly y Steve para completar la maratón y veremos si la distancia entre los tiempos es 2.75 horas. Para determinar los tiempos, dividimos la distancia, 20 kilómetros, entre la velocidad.

$$\text{Tiempo de Kimberly} = \frac{20}{16} = 1.25 \text{ horas}$$

$$\text{Tiempo de Steve} = \frac{20}{5} = 4 \text{ horas}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 25**

Como $4 - 1.25 = 2.75$ horas, las respuestas satisfacen la condición. Por tanto, la distancia que cubre la maratón es de 20 kilómetros. 

En el ejemplo 5, restamos 2.75 horas del tiempo de Steve para obtener una ecuación. Podríamos haber sumado 2.75 horas al tiempo de Kimberly para obtener una ecuación equivalente. Resuelva nuevamente el ejemplo 5, pero ahora sumando 2.75 horas al tiempo de Kimberly.

3 Plantear y resolver problemas de trabajo

Los problemas donde dos o más máquinas o personas trabajan juntos para completar cierta tarea son los **problemas de trabajo**. Con frecuencia, este tipo de problemas incluyen ecuaciones con fracciones. Por lo general, utilizan el hecho de que la parte del trabajo realizado por la persona 1 (o máquina 1) más la parte del trabajo realizado por la persona 2 (o máquina 2) es igual a la cantidad de trabajo total realizado por ambas personas (o ambas máquinas). *Representamos la cantidad total del trabajo realizado por el número 1, que representa un trabajo completo terminado.*

Parte de la tarea hecha por la primera persona o máquina	+	Parte de la tarea hecha por la segunda persona o máquina	=	1 (tarea completa terminada)
--	---	--	---	------------------------------------

Para determinar la parte de la tarea realizada por cada persona o máquina, utilizamos la fórmula.

parte de la tarea concluida = velocidad • tiempo

Esta fórmula es muy similar a la fórmula

$\text{cantidad} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$

que analizamos en la sección 3.5. Para determinar la parte de la tarea terminada, necesitamos determinar la velocidad. Suponga que Paul puede hacer una tarea particular en 6 horas. Entonces, él completaría $\frac{1}{6}$ de la tarea por hora. Así, su velocidad es $\frac{1}{6}$ de tarea por hora. Si Audrey puede hacer una tarea particular en 5 minutos, su velocidad es de $\frac{1}{5}$ de la tarea por minuto. En general, si una persona o máquina puede completar una tarea en t unidades de tiempo, la velocidad es $\frac{1}{t}$.

EJEMPLO 6 Construcción de un entarimado Marty Agar puede construir un entarimado en su patio en 20 horas. Su esposa, Betty, puede hacer el mismo trabajo en 30 horas. ¿Cuánto tiempo tardarían en construirlo juntos?

Solución *Entender y traducir* Sea t = el tiempo, en horas, para el señor y la señora Agar trabajando juntos en la construcción del entarimado. Construiremos una tabla para ayudarnos a determinar la parte de la tarea completada por el señor Agar y la señora Agar en t horas.



Trabajador	Velocidad de trabajo (parte de la tarea completada por hora)	Tiempo trabajado	Parte de la tarea
Señor Agar	$\frac{1}{20}$	t	$\frac{t}{20}$
Señora Agar	$\frac{1}{30}$	t	$\frac{t}{30}$

$$\left(\begin{array}{c} \text{parte del entarimado hecho} \\ \text{por el señor Agar en } t \text{ horas} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{parte del entarimado hecho} \\ \text{por la señora Agar en } t \text{ horas} \end{array} \right) = 1 \text{ (entarimado completo)}$$
$$\frac{t}{20} + \frac{t}{30} = 1$$

Realizar los cálculos Ahora multiplicamos ambos lados de la ecuación por el mcd, 60.

$$60 \left(\frac{t}{20} + \frac{t}{30} \right) = 60 \cdot 1$$
$$\overset{3}{\cancel{60}} \left(\frac{t}{\cancel{20}} \right) + \overset{2}{\cancel{60}} \left(\frac{t}{\cancel{30}} \right) = 60 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$
$$3t + 2t = 60$$
$$5t = 60$$
$$t = 12$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 27 *Respuesta* Por tanto, el señor y la señora Agar, trabajando juntos, pueden construir el entarimado en 12 horas. Le dejamos la comprobación a usted. 

SUGERENCIA

En el ejemplo 6, el señor Agar podría construir el entarimado, él solo, en 20 horas, y la señora Agar podría hacerlo sola en 30 horas. Determinamos que juntos lo podrían hacer en 12 horas. ¿Tiene sentido esta respuesta? Como es de esperarse, el tiempo para construir juntos el entarimado es menor que el tiempo que cada uno emplearía en completar el trabajo. Al resolver un problema de trabajo, siempre examine su respuesta para ver si tiene sentido. Si no, vuelva a resolver el problema y encuentre su error.

EJEMPLO 7

Almacenamiento de vino En una bodega en el Valle de Napa, California, un tubo puede llenar un depósito con vino en 3 horas, y otro tubo puede vaciar el tanque en 5 horas. Si las válvulas de ambos tubos están abiertas, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito vacío?

Solución

Entender y traducir Sea t = cantidad de tiempo en llenar el tanque con ambas válvulas abiertas.



Tubo	Velocidad de trabajo	Tiempo	Parte de la tarea
Tubo para llenar el depósito	$\frac{1}{3}$	t	$\frac{t}{3}$
Tubo para vaciar el depósito	$\frac{1}{5}$	t	$\frac{t}{5}$

Cuando un tubo está llenando, el otro está vaciando el depósito. Esto es, los tubos están trabajando uno en contra del otro. Por tanto, en lugar de sumar las partes de la tarea, como se hizo en el ejemplo 6, en donde las personas trabajaban juntas, restaremos las partes de la tarea.

$$\left(\text{parte del depósito llenado en } t \text{ horas}\right) - \left(\text{parte del depósito vaciado en } t \text{ horas}\right) = 1 \text{ (depósito lleno por completo)}$$

$$\frac{t}{3} - \frac{t}{5} = 1$$

Realizar los cálculos

$$15\left(\frac{t}{3} - \frac{t}{5}\right) = 15 \cdot 1 \quad \text{Multiplicar ambos lados por el mcd, 15.}$$

$$15\left(\frac{t}{3}\right) - 15\left(\frac{t}{5}\right) = 15 \quad \text{Propiedad distributiva.}$$

$$5t - 3t = 15$$

$$2t = 15$$

$$t = 7\frac{1}{2}$$

Comprobar y responder El depósito se llenará en $7\frac{1}{2}$ horas. Esta respuesta es razonable, ya que esperamos que, cuando el tanque se está vaciando al mismo tiempo, tarde más de 3 horas.

EJEMPLO 8

Servicio de limpieza de ventanas Kathy y Courtney son propietarias de un pequeño servicio de limpieza de ventanas. Cuando Kathy limpia sola todas las ventanas en cierto edificio, tarda 8 horas. Cuando Kathy y Courtney trabajan juntas, pueden limpiar todas las ventanas de ese edificio en 5 horas. ¿Cuántas horas tardará Courtney en limpiar todas las ventanas si trabaja sola?

Solución



Sea t = tiempo que le toma a Courtney limpiar sola las ventanas. Entonces la velocidad de Courtney es $\frac{1}{t}$. Construyamos una tabla para ayudar a analizar el problema. Como Kathy puede limpiar todas las ventanas ella sola en 8 horas, su velocidad es $\frac{1}{8}$ del trabajo por hora. En la tabla utilizamos el hecho de que juntas pueden limpiar todas las ventanas en 5 horas.

Trabajadora	Velocidad de trabajo	Tiempo	Parte de la tarea
Kathy	$\frac{1}{8}$	5	$\frac{5}{8}$
Courtney	$\frac{1}{t}$	5	$\frac{5}{t}$

$$\left(\begin{array}{c} \text{parte de las ventanas} \\ \text{limpiadas por Kathy} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{parte de las ventanas} \\ \text{limpiadas por Courtney} \end{array} \right) = 1$$
$$\frac{5}{8} + \frac{5}{t} = 1$$

Realizar los cálculos

$$8t \left(\frac{5}{8} + \frac{5}{t} \right) = 8t \cdot 1$$

Multiplicar ambos lados por el mcd, 8t.

$$8t \left(\frac{5}{8} \right) + 8t \left(\frac{5}{t} \right) = 8t$$

Propiedad distributiva.

$$5t + 40 = 8t$$

$$40 = 3t$$

$$\frac{40}{3} = t$$

$$13\frac{1}{3} = t$$

Comprobar y responder Por lo tanto, Courtney tarda $13\frac{1}{3}$ o 13 horas 20 minutos en limpiar todas las ventanas, ella sola. Esta respuesta es razonable ya que esperamos que le tome más tiempo a Courtney limpiar las ventanas ella sola que lo que les tomaría a Kathy y a Courtney si trabajan juntas. 

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 35

EJEMPLO 9

Notas de agradecimiento Peter y Kaitlyn Kewin están escribiendo notas de agradecimiento para sus invitados que asistieron a la fiesta de su vigésimo aniversario de bodas. Kaitlyn sola, mientras que podría escribir todas las notas en 8 horas Peter, solo, podría escribir todas las notas en 7 horas. Después de que Kaitlyn había escrito notas durante 5 horas, ella debía dejar la ciudad por un asunto de trabajo. Entonces Peter continuó con la tarea de escribir las notas de agradecimiento. ¿Cuánto tardará Peter en terminar de escribir las notas que faltan?

Solución

Entender y traducir Sea t = tiempo que tardaría Peter en terminar de escribir las notas



Persona	Velocidad de trabajo	Tiempo	Parte de la tarea
Kaitlyn	$\frac{1}{8}$	5	$\frac{5}{8}$
Peter	$\frac{1}{7}$	t	$\frac{t}{7}$

$$\left(\begin{array}{c} \text{parte de las notas} \\ \text{escritas por Kaitlyn} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{parte de las notas} \\ \text{escritas por Peter} \end{array} \right) = 1$$

$$\frac{5}{8} + \frac{t}{7} = 1$$

Realizar los cálculos

$$56 \left(\frac{5}{8} + \frac{t}{7} \right) = 56 \cdot 1$$

Multiplicar ambos lados por el mcd, 56.

$$56 \left(\frac{5}{8} \right) + 56 \left(\frac{t}{7} \right) = 56$$

Propiedad distributiva.

$$35 + 8t = 56$$

$$8t = 21$$

$$t = \frac{21}{8} \quad \text{o bien} \quad 2\frac{5}{8}$$

Responder Por tanto, Peter tardará $2\frac{5}{8}$ horas en terminar de escribir las notas.



Matemáticas en acción

Pérdida de presión por altura en tuberías

Existen muchas aplicaciones de las ecuaciones racionales en la vida diaria. Algunas se ilustraron en este capítulo. Una de tales aplicaciones incluye lo que se conoce como pérdida de presión por altura. Ésta es la pérdida de energía de un líquido que se bombea desde un punto en una tubería a otro punto. Una pérdida de presión por altura de un pie es la misma pérdida de energía que ocurriría si la tubería fuese elevada un pie de la horizontal desde el punto de medición. La pérdida de presión por altura (HL, por sus siglas en inglés), expresada en pies, puede calcularse con la ecuación racional:

$$HL = k \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{V^2}{2g}$$

en donde k = factor de fricción; L = longitud de la tubería, en pies; D = diámetro de la tubería, en pies; V = velocidad del flujo, en pies por segundo; g = constante de la gravedad = 32.17 pies por segundo al cuadrado.

Hacer un seguimiento y controlar la presión del agua que pasa por tuberías tiene aplicaciones dondequiera que el agua sea movida de un lugar a otro. En plantas de energía nuclear, inmensas cantidades de agua se bombean para enfriar diferentes partes del reactor. Un diseño que no prevenga este tipo de pérdida podría tener como consecuencia recibir menor presión que la esperada para el agua fría, que es críticamente necesaria. El resultado podría ser que la planta se apague o incluso una falla que amenace la vida.

Difícilmente uno podría imaginar un hogar moderno sin agua a presión que fluye por la cocina, los

baños, las máquinas de lavado y conexiones a mangueras exteriores. Los cálculos de la presión del agua son parte importante en el diseño de la plomería de sistemas sépticos. Un daño grave a la salud podría resultar de una velocidad de flujo que no sea suficiente para mover las aguas residuales a una ubicación de almacenamiento o de drenaje. De forma análoga, un mal diseño de la plomería en una alberca podría significar que el agua no circulara a través de los filtros a una velocidad apropiada, lo que podría tener como consecuencia una peligrosa concentración de bacterias.

La pérdida de presión por altura es un factor significativo en decenas de miles de ubicaciones agrícolas y de manufactura en donde los sistemas dependen de líquidos que fluyen a lo largo de tuberías, de una forma predecible. Los ingenieros en hidráulica utilizan la fórmula de pérdida de presión por altura como una herramienta importante para asegurar un adecuado flujo del agua.



Conjunto de ejercicios 6.7

Ejercicios conceptuales

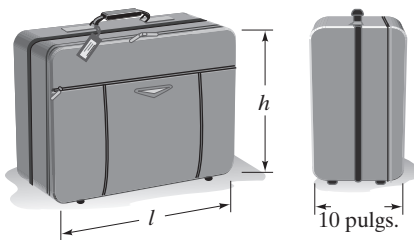
- Las fórmulas de geometría que se analizaron en la sección 3.1, con frecuencia son ecuaciones racionales. Proporcione tres fórmulas que sean ecuaciones racionales.
- Suponga que los automóviles 1 y 2 están viajando a la misma población a 60 millas y que el automóvil 1 viaja 10 millas por hora más rápido que el automóvil 2.
 - Sea r la velocidad del automóvil 2. Escriba una expresión, tiempo = $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$, para el tiempo que tarda el automóvil 1 en llegar a su destino.
 - Ahora sea r la velocidad del automóvil 1. Escriba una expresión, usando tiempo = $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$, para el tiempo que le toma al automóvil 2 llegar a su destino.
- En una ecuación para un problema de trabajo, un lado de la ecuación se hace igual a 1. ¿Qué representa este 1 en el problema?
- Suponga que Tracy Augustine puede terminar una tarea específica en 3 horas, mientras que la misma tarea puede terminarla John Bailey en 7 horas. ¿Cómo representaría la parte de la tarea terminada por Tracy en 1 hora?, ¿y cómo la de John en 1 hora?

Práctica de habilidades

En los ejercicios 5 al 36, resuelva el problema y responda las preguntas.

Problemas de geometría, véase el ejemplo 1.

- Empaque de computadoras** La compañía Phillips Paper fabrica piezas rectangulares de cartón para empacar computadoras. Las hojas de cartón deben tener un área de 90 pulgadas cuadradas y la longitud de una hoja es 4 pulgadas mayor que $\frac{2}{3}$ su ancho. Determine la longitud y el ancho de la hoja de cartón que se fabricará.
- Equipaje permitido** En la mayoría de las aerolíneas, el equipaje que se permite llevar con uno puede tener un ancho (a) máximo de 10 pulgadas con un volumen máximo de 3840 pulgadas cúbicas; vea la siguiente figura. Si la altura (h) del equipaje es $\frac{2}{3}$ de longitud (l), determine las dimensiones del equipaje más grande que puede uno llevar al abordar. Utilice $V = lah$.



- Triángulos de masa** Los roles Pillsbury se empaican en tubos que contienen triángulos perforados de masa. La ba-

se de la pieza triangular es 5 centímetros mayor que su altura. Determine la base y la altura de la pieza de pan, si el área es de 42 centímetros cuadrados.

- Señal de Ceda el paso** Las señales de “Ceda el paso” a la derecha utilizadas en Estados Unidos son triangulares. El área de la señal es de 558 pulgadas cuadradas. La altura es de 5 pulgadas menor que su base. Determine la longitud de la base de una señal de este tipo.



- Jardín triangular** Un área triangular es de 12 pulgadas cuadradas. Determine la base del área triangular, si la altura es 1 pie menor que $\frac{1}{2}$ la base.
- Tablero de anuncios** Un tablero de anuncios tiene la forma de un trapecio. El área de éste es de 32 pies cuadrados. Si su altura es $\frac{1}{4}$ de la longitud de la suma de las dos bases, determine la altura del tablero de anuncios.

Problemas numéricos, vea el ejemplo 2.

11. **Diferencia de números** Un número es 10 veces mayor que otro. La diferencia de sus recíprocos es 3. Determine los dos números.
12. **Suma de números** Un número es 3 veces mayor que otro. La suma de sus recíprocos es $\frac{4}{3}$. Determine los dos números.
13. **Numerador creciente** El numerador de la fracción $\frac{3}{4}$ se aumenta en una cantidad de modo que el valor de la fracción resultante es $\frac{5}{2}$. Determine la cantidad en la cual se aumentó el numerador.
14. **Denominador decreciente** El denominador de la fracción $\frac{6}{19}$ se disminuye en una cantidad, de modo que el valor de la fracción resultante es $\frac{3}{8}$. Determine la cantidad en la que se disminuyó el denominador.

Problemas de movimiento, vea los ejemplos 3 a 5.

15. **Viaje en barco de vapor** En el Río Mississippi, cerca de Nueva Orleáns, el barco de vapor *Creole Queen* viaja 4 millas río arriba (en contra de la corriente) en la misma cantidad de tiempo que recorre 6 millas río abajo (a favor de la corriente). Si la corriente del río es de 2 millas por hora, determine la velocidad del *Creole Queen* en aguas tranquilas.



16. **Viaje en kayak** Kathy Boothby-Sestak puede remar en su kayak a 6 millas por hora en aguas tranquilas. Si en el río Wabash, cerca de Lafayette, Indiana, tarda en remar 3 millas río arriba 4 millas río abajo, determine la velocidad de la corriente del río.
17. **Viaje en tranvía** Un tranvía viaja en una dirección a un promedio de 15 millas por hora, luego da la vuelta y regresa por el mismo camino en dirección opuesta a 15 millas por hora. Si el tiempo total del viaje en el tranvía es de $2\frac{1}{2}$ horas, ¿qué tan lejos viajó el tranvía en una dirección?
18. **Viaje en motocicleta** Brandy Dawson y Jason Dodge inician un viaje en motocicleta en el mismo punto, un poco al norte de Fort Worth, Texas. Ambos viajan a San Antonio, Texas, una distancia de 400 kilómetros. Brandy conduce 30 kilómetros por hora más rápido que Jason. Cuando Brandy llega a su destino, Jason sólo ha llegado a Austin, Texas, a una distancia de 250 kilómetros. Determine la velocidad aproximada de cada motocicleta.
19. **Vuelo en jet** Elenore Morales viajó 1600 millas en un avión comercial, desde Kansas City, Missouri, a Spokane, Washington. Luego viajó 500 millas más en un aeroplano (de hélice) privado desde Spokane a Billings, Montana. Si la velocidad del jet fue 4 veces la velocidad del aeroplano privado y el tiempo total en el aire fue de 6 horas, determine la velocidad de cada avión.
20. **Régimen de ejercicios** Como parte de su régimen de ejercicios, Chris Barker camina una distancia de 2 millas en una pista bajo techo y luego trota una milla adicional, al doble de velocidad de la que camina. Si el tiempo total que dedica en la pista fue $\frac{3}{4}$ de hora, determine la velocidad a la que camina y a la que trota.
21. **De Dover a Calais** Para ir de Dover, Inglaterra, a París, Francia, Renee Estívez tomó el aereodeslizador sobre el canal inglés, de Dover a Calais, Francia. Luego tomó un tren bala a París. El aerodeslizador viajó a un promedio de 40 millas por hora, y el tren viajó a un promedio de 120 millas por hora. Si la distancia total recorrida fue de 200 millas, y el tiempo total, en conjunto, utilizado (en el barco y en el tren) fue de 2.2 horas, determine la distancia que ella viajó en barco y la distancia que viajó en tren.
22. **Correr y caminar** Kristen Taylor trota cierta distancia y luego camina otra. Cuando ella corre, promedia 5 millas por hora, y cuando camina 2 millas por hora. Si ella camina y trota un total de 3 millas en 0.9 hora, ¿cuánto recorre trotando y cuánto caminando?
23. **A favor y en contra del viento** Un Boeing 747 voló desde San Francisco a Honolulu, una distancia de 2,800 millas. Volando con el viento a favor, promedió 600 millas por hora. Cuando el viento cambió y estuvo en contra, la velocidad cayó a 500 millas por hora. Si el tiempo total del viaje fue de 5 horas, determine la duración del vuelo a cada velocidad.

24. Tren bala Se sabe que los trenes bala de Japón promedian 240 kilómetros por hora (kph). Antes de utilizar los trenes bala, los trenes en Japón viajaban a una velocidad promedio de 120 kph. Si un tren bala que viaja de Shin-Osake a Hakata puede completar su trayecto en 2.3 horas menos que un tren antiguo, determine la distancia de Shin-Osake a Hakata.

25. Esquiadores acuáticos En un espectáculo acuático un bote jala a un esquiador a una velocidad de 30 pies por segundo. Cuando llega al final del lago, se agregaron más esquiadores para ser jalados por el bote, por lo que la velocidad del bote disminuyó a 20 pies por segundo. Si el bote recorrió la misma distancia con los esquiadores que se sumaron que con el esquiador solo, y el viaje de regreso, con todos los esquiadores, tomó 15 segundos más que el recorrido con un solo esquiador, ¿cuánto recorrió el bote, en pies, en una dirección?



26. Esquí a campo traviesa Alana Bradley y su padre, Tim, comenzaron a esquiar al mismo tiempo la misma prueba a campo traviesa en Elmwood Park, en Sioux Falls, Dakota del Sur. Si Alana, quien promedia 9 millas por hora, termina la prueba 0.25 horas más pronto que su padre, quien promedia 6 millas por hora, determine la longitud de la prueba.

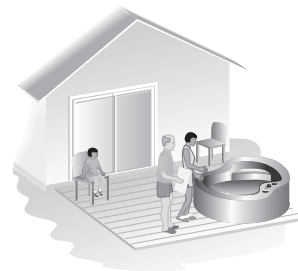
Problemas de trabajo, vea los ejemplos 6 a 9.

27. Papel tapiz Reynaldo y Felicia Fernández deciden tapizar la sala. Felicia, quien tiene experiencia en esta tarea, puede colocar el papel tapiz a toda la habitación en 6 horas. Reynaldo puede hacer el mismo trabajo en 8 horas. ¿Cuánto tardarán en colocar el papel tapiz en la sala si trabajan juntos?

28. Banda transportadora En una mina de sal, una banda transportadora requiere de 20 minutos para llenar un gran camión con mineral. Una segunda banda transportadora requiere 30 minutos para llenar el mismo camión con el mineral. ¿Cuánto tardarían en llenar el camión si trabajan juntas ambas bandas transportadoras?



29. Jacuzzi Pam y Loren Fornier saben que su jacuzzi puede llenarse en 2 horas y desaguarse por completo en 3 horas. Pam abrió la llave y regresó a la casa. Al cabo de 2 horas, fue al jacuzzi y vio, con desilusión, que sólo estaba parcialmente lleno, a consecuencia de que el desagüe se había quedado abierto. Si la llave de agua estaba abierta y el desagüe se dejó abierto, ¿cuánto tiempo tardaría en llenarse completamente el jacuzzi?



Vea el ejercicio 29.

30. Llenado de un depósito Durante una tormenta, la lluvia fluye a un gran depósito contenedor. A la velocidad que la lluvia está cayendo, el depósito vacío se llenaría en 8 horas. En la parte inferior del depósito se encuentra un grifo para extraer agua. Por lo común, toma 12 horas, con el grifo completamente abierto, vaciar el depósito lleno. Si el depósito está vacío y el grifo, accidentalmente, se quedó abierto, y la lluvia cae a tasa constante, ¿cuánto tiempo tomaría para que se llene por completo el depósito?

31. Flujo de agua Cuando se hace pasar agua a una manguera de media pulgada de diámetro, una pequeña piscina de jardín puede llenarse en 5 horas. Cuando se hace pasar agua a dos grifos y luego pasa por dos mangueras, la de media pulgada de diámetro y otra de tres cuartos de pulgada de diámetro, la piscina se llena en 2 horas. ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse la piscina si sólo se utiliza la manguera de tres cuartos de pulgada de diámetro?

32. Cheques de nómina En el banco de ahorro NCNB, le toma a una computadora 4 horas procesar e imprimir los cheques de la nómina. Cuando se utiliza una segunda

computadora y las dos trabajan juntas, los cheques se pueden procesar en 3 horas. ¿Cuánto tardaría la segunda computadora en procesar e imprimir, ella sola, los cheques de la nómina?

33. **Excavación de una zanja** Una compañía constructora con dos excavadoras ha sido contratada para cavar una larga zanja para tubería del drenaje. La excavadora más grande puede cavar toda la zanja en 12 días. La más pequeña puede cavar toda la zanja en 15 días. La excavadora grande inicia a trabajar en la zanja, pero después de 5 días se transfiere a un trabajo diferente, y la excavadora pequeña continúa con el trabajo de la zanja. ¿Cuánto tomará a la excavadora pequeña completar el trabajo?
34. **Envío de condimentos** Chadwick y Melissa Wicker entregan latas de tamaño institucional de condimentos a varios almacenes en Pennsylvania. Si Chadwick manejase todo el trayecto, el viaje tardaría alrededor de 10 horas. Melissa es una conductora más rápida. Si Melissa condujese todo el trayecto tardarían 8 horas. Después que Melissa ha manejado durante 4 horas, Chadwick toma el volante. Aproximadamente, ¿cuánto tiempo más conducirá Chadwick antes de llegar a su destino final?
35. **Tormenta de nieve** Después de una severa tormenta de nieve, Ken y Bettina Reeves deben limpiar su camino de entrada y su acera. Ken solo puede limpiar la nieve en 4 horas, y Bettina puede limpiar la nieve, ella sola, en 6 horas. Después de que Bettina ha estado trabajando durante 3 horas, Ken se le une. ¿Cuánto tiempo más trabajarán juntos para quitar el resto de la nieve?



36. **Granja cooperativa** Una gran granja cooperativa cerca de Hutchinson, Kansas, posee tres empacadoras de heno.

La más vieja puede recolectar y empacar un acre de heno en 3 horas, y cada una de las dos empacadoras más nuevas puede trabajar un acre en 2 horas.

- a) ¿Cuánto tardarían las tres empacadoras, trabajando juntas, en recolectar y empacar un acre?
- b) ¿Cuánto tardarían las tres empacadoras, trabajando juntas, en recolectar y empacar los 375 acres de heno de la granja?
37. **Recolección de petróleo** Un barco diseñado para recolectar el petróleo de la superficie del agua tiene dos recolectores. Uno puede llenar el depósito contenedor del barco en 60 horas, mientras que el segundo recolector puede llenar el mismo depósito en 50 horas. También hay una válvula en el depósito que se utiliza para transferir el petróleo a un depósito más grande. Si no está entrando más petróleo al depósito contenedor y éste está lleno, el petróleo puede transferirse a un depósito más grande en 30 horas. Si ambos recolectores empiezan a trabajar y la válvula en el depósito está abierta, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse el depósito del barco, si inicialmente está vacío?
38. **Jardín de flores** Bob puede plantar un jardín de flores en 8 horas, si trabaja solo. Mary puede hacer lo mismo en 10 horas, si trabaja sola, y Gloria sola lo puede hacer en 12 horas. ¿Cuánto tardarían en plantar el jardín si trabajan juntos?



Problemas de reto

39. **Recíproco de un número** Si 5 veces un número se suma a 4 veces el recíproco del número, la respuesta es 12. Determine el número.
40. **Determine un número** El recíproco de la diferencia de cierto número y 3 es dos veces el recíproco de la diferencia del doble del número y 6. Determine el o los números.

41. Recolección de arándanos Ed y Samantha Weisman, cuyos padres son propietarios de una hacienda de frutas, deben recolectar el mismo número de pintas de arándanos diariamente durante la temporada. Ed recolecta un promedio de 8 pintas por hora, mientras que Samantha recolecta un promedio de 4 pintas por hora. Si Ed y Samantha empiezan la recolección de arándanos al mismo tiempo, y Samantha termina 1 hora después que Ed, ¿cuántas pintas de arándanos debe recolectar cada uno?

42. Clasificación de correspondencia Una máquina procesadora de correo puede clasificar una gran bandeja de correo en 1 hora. Un modelo más reciente puede clasificar la misma cantidad de correo en 40 minutos. Si se operan juntas, ¿cuánto tiempo tardarían en clasificar la bandeja de correo?

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] 43. Simplifique $\frac{1}{2}(x + 3) - (2x + 6)$.

[5.2] 44. Mediante agrupación, factorice $y^2 + 5y - y - 5$.

[6.2] 45. Divida $\frac{x^2 - 14x + 48}{x^2 - 5x - 24} \div \frac{2x^2 - 13x + 6}{2x^2 + 5x - 3}$.

[6.4] 46. Reste $\frac{x}{6x^2 - x - 15} - \frac{5}{9x^2 - 12x - 5}$.

6.8 VARIACIÓN



- 1 Plantear y resolver problemas de variación directa.
- 2 Plantear y resolver problemas de variación inversa.

Muchas fórmulas científicas se expresan como variaciones. Muchas de nuestras actividades diarias también incluyen variación. Una **variación** es una ecuación que relacione una variable con una o más variables usando las operaciones de multiplicación o división (o ambas). En este libro analizaremos dos tipos de variación: **variación directa** y **variación inversa**. Primero estudiaremos la variación directa.

1 Plantear y resolver problemas de variación directa

En la variación directa, las dos variables crecen al mismo tiempo o las dos decrecen al mismo tiempo; esto es, cuando una variable crece, también lo hace la otra, y cuando una variable disminuye, también lo hace la otra.

Suponga que durante un tiempo específico sale agua de una manguera de jardín y llena una cubeta. Entre mayor sea el flujo del agua que sale de la manguera mayor será el volumen del agua en la cubeta, y entre menor sea el flujo de agua que sale de la manguera, menor será el volumen de agua en la cubeta. Éste es un ejemplo de variación directa. El volumen del agua en la cubeta varía de forma directa con la tasa de flujo de la manguera.

Considere un automóvil que viaja a 50 millas por hora. El automóvil recorre 50 millas en 1 hora, 100 millas en 2 horas, 150 millas en 3 horas. Conforme aumenta el tiempo, también se incrementa la distancia recorrida. Éste también es un ejemplo de variación directa. Podemos ver que para una velocidad constante, cuando el tiempo aumenta, también lo hace la distancia recorrida, y si el tiempo disminuye también disminuye la distancia recorrida.

La fórmula usada para calcular la distancia es

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

Como la velocidad es constante, 50 millas por hora, la fórmula puede escribirse como

$$d = 50t$$

Decimos que la distancia, d , *varía directamente* con el tiempo, t , o que la distancia es *directamente proporcional* al tiempo t . En la ecuación, el 50 es una constante que se conoce como **constante de proporcionalidad**. Ahora definiremos la variación directa.

Variación directa

Si una variable y varía de forma directa con una variable x , entonces

$$y = kx$$

en donde k es la *constante de proporcionalidad* (o la constante de variación).

Cuando nos dicen que una cantidad que varía de forma directa como otra, por lo general iniciamos con una ecuación en la forma $y = kx$; sin embargo, para las variables, se pueden utilizar otras letras en lugar de x y y .

EJEMPLO 1 Calentamiento de un jacuzzi Cuando se enciende el calentador para calentar el agua en un jacuzzi, la temperatura del agua, w , aumenta de forma directa con el tiempo, t , que el calentador está encendido

- Escriba la variación como una ecuación.
- Si la constante de proporcionalidad, k , es 0.5, determine el aumento en la temperatura del agua al cabo de 30 minutos.

Solución



AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 35

- Nos dijeron que la temperatura del agua varía de forma directa con el tiempo. Por tanto, planteamos la proporción directa como sigue:

$$w = kt$$

- Para determinar el aumento en la temperatura del agua, sustituimos 0.5 por k , y 30 por t .

$$w = kt$$

$$w = 0.5(30) = 15$$

Así que, después de 30 minutos, la temperatura del agua ha aumentado 15°. 

En muchos problemas de variación primero tendrá que determinar la constante de proporcionalidad antes de poder determinar la variable que se le ha pedido encontrar. Para determinar la constante de proporcionalidad, sustituya los valores dados para las variables y despeje k . Ilustramos este procedimiento en el ejemplo 2.

EJEMPLO 2 Problema de variación directa s varía de forma directa con el cuadrado de m . Si $s = 100$ cuando $m = 5$, determine s cuando $m = 12$.

Solución

- Entender y traducir** Iniciamos planteando la ecuación. Observe que se nos dijo que s varía de forma directa con el cuadrado de m . El cuadrado de m se escribe m^2 . Por tanto, la ecuación es $s = km^2$. Como no se nos dio la constante de proporcionalidad, la determinamos sustituyendo los valores que nos dieron para las variables.

$$s = km^2$$

$$100 = k(5^2) \quad \text{Sustituir valores.}$$

$$100 = k(25)$$

$$100 = 25k$$

$$4 = k$$

Ahora que hemos determinado k , podemos responder la pregunta sustituyendo 4 por k , y 12 por m .

Realizar los cálculos

$$\begin{aligned}s &= km^2 \\s &= 4(12)^2 \\s &= 4(144) \\s &= 576\end{aligned}$$

Respuesta Así, cuando $m = 12$, $s = 576$.



EJEMPLO 3 Dosis de droga La cantidad de la droga, d , dada a una persona es directamente proporcional al peso de la persona, w . Si una persona pesa 75 kilogramos se le suministran 150 miligramos (mg) de alopurinol; determine cuántos miligramos de alopurinol se le suministrarán a una persona que pesa 96 kg.

Solución Entender y traducir Nos dijeron que la cantidad de la droga es directamente proporcional al peso de la persona. Así que planteamos la ecuación

$$d = kw$$

Ahora determinamos k , sustituyendo los valores dados para d y w .

Realizar los cálculos

$$\begin{aligned}d &= kw \\150 &= k(75) \\\frac{150}{75} &= k \\2 &= k\end{aligned}$$

Ahora determinaremos el número de miligramos de la droga que se suministrará, sustituyendo 2 por k y 96 por w .

$$\begin{aligned}d &= kw \\d &= 2(96) = 192\end{aligned}$$

Comprobar y responder Como esperamos, la cantidad de la droga será mayor que 150 miligramos, nuestra respuesta es razonable. A una persona de 96 kg se le debe administrar 192 miligramos de la droga.



AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 39

El ejemplo 3 también podría resolverse mediante una proporción.

2 Plantear y resolver problemas de variación inversa

Ahora analizaremos la variación inversa. Cuando dos cantidades varían de forma inversa, significa que cuando una cantidad aumenta, la otra disminuye, y viceversa.

Suponga que está haciendo un guisado en la estufa. De forma general, entre más alta sea la temperatura del horno, menor será el tiempo que se necesita para cocinar el guisado. Esto es, cuando la temperatura aumenta, el tiempo disminuye, y viceversa. Así, el tiempo y la temperatura son inversamente proporcionales uno del otro, o varía inversamente con el otro.

Para explicar la variación inversa, nuevamente utilizamos la fórmula de la distancia,

$$\text{distancia} = \text{velocidad} \cdot \text{tiempo}$$

Si despejamos el tiempo, obtenemos $\text{tiempo} = \frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$. Suponga que la distancia se fija en 100 millas, entonces

$$\text{tiempo} = \frac{100}{\text{velocidad}}$$

A una velocidad de 100 millas por hora, tomaría 1 hora en cubrir las 100 millas de distancia. A 50 millas por hora, tomaría 2 horas en cubrir la distancia. A 25 mph tomaría 4 horas. Observe que cuando la velocidad (o rapidez) disminuye, el tiempo aumenta, y viceversa. La ecuación anterior puede escribirse

$$t = \frac{100}{r}$$

Éste es un ejemplo de variación inversa en la que el tiempo y la velocidad son inversamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es 100. Ahora definimos la variación inversa.

Variación inversa

Si una variable y varía de forma inversa con una variable x , entonces

$$y = \frac{k}{x} \text{ (o } xy = k)$$

en donde k es la constante de proporcionalidad.

Ahora resolveremos dos ejemplos.

EJEMPLO 4 Renta de un velero Un grupo de amigos van a rentar un velero para un viaje de placer. El costo por persona de la renta del velero, c , es inversamente proporcional con el número de personas que rentan el velero, n . Si 8 amigos deciden rentar el velero, el costo por persona es \$40. Determine el costo por persona, si 14 amigos deciden rentar el velero.

Solución **Entender y traducir** Nos dicen que ésta es una variación inversa. Por tanto, plantearemos una ecuación para representar la proporción inversa.



$$c = \frac{k}{n}$$

Como no se nos da la constante de proporcionalidad, determinamos k mediante la sustitución de los valores dados para c y n .

$$40 = \frac{k}{8}$$

$$320 = k$$

Ahora podemos determinar la respuesta a la pregunta utilizando $k = 320$ y $n = 14$

Realizar los cálculos

$$c = \frac{k}{n}$$

$$c = \frac{320}{14}$$

$$c = 22.86$$

Comprobar y responder Si 14 amigos deciden rentar el velero, el costo para cada persona es de alrededor de \$22.86. Si usted multiplica $22.86(14)$ obtiene 320.04, esto es un poco más que la constante de proporcionalidad. Se debe al redondeo de $\frac{320}{14}$ a \$22.86.



EJEMPLO 5



Volumen de un altavoz El volumen, l , de un altavoz de un estéreo, medido en decibeles (dB), varía de forma inversa con el cuadrado de la distancia, d , del oyente al altavoz. Suponiendo que para un altavoz particular la intensidad es de 20 dB, cuando el oyente se encuentra a 6 pies del altavoz.

- Determine una ecuación que exprese la relación entre el volumen y la distancia.
- Por medio de la ecuación que obtuvo en la parte **a)**, determine el volumen cuando una persona está a tres pies del altavoz.

Solución

Este problema se divide en dos partes. La primera nos pide determinar una fórmula general, mientras que la segunda parte nos pide utilizar la fórmula.

a) Entender y traducir Nos dicen que el volumen varía de forma inversa con el *cuadrado* de la distancia. Por tanto, escribimos la siguiente ecuación y despejamos k .

Realizar los cálculos

$$\begin{aligned} l &= \frac{k}{d^2} \\ 20 &= \frac{k}{6^2} \\ 20 &= \frac{k}{36} \\ 720 &= k \end{aligned}$$

Comprobar y responder La constante de proporcionalidad, k , es 720. Como para este altavoz $k = 720$, la ecuación que estamos buscando es

$$l = \frac{720}{d^2}$$

b) Entender y traducir En la parte **a)** determinamos la ecuación para encontrar el volumen. En la fórmula, sustituimos 3 por d y despejamos l .

$$\begin{aligned} l &= \frac{720}{d^2} \\ l &= \frac{720}{3^2} \\ l &= \frac{720}{9} \\ l &= 80 \end{aligned}$$

Realizar los cálculos

Comprobar y responder Por tanto, a 3 pies, el volumen es de 80 decibeles. Esto es razonable ya que a una distancia más corta (3 pies contra 6 pies) el sonido será más alto. 

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 49

Conjunto de ejercicios 6.8

Ejercicios conceptuales

- ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad en la variación directa $m = 40r$?
- ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad en la variación inversa $w = \frac{60}{r}$?
- Proporcione la forma general de la variación directa.
- Proporcione la forma general de la variación inversa.

Práctica de habilidades

Determine si las siguientes son variaciones directas o inversas. Explique su respuesta.

5. El diámetro de una manguera y la cantidad de agua que sale de ella.
6. La abertura de la lente de una cámara y la cantidad de luz que llega a la película.
7. La velocidad de una tortuga y el tiempo que tarda en cruzar una carretera.
8. La edad de un automóvil, hasta de 10 años, y el valor del automóvil.
9. La temperatura del agua y el tiempo que tarda en derretirse un cubo de hielo colocado en el agua.
10. El número de personas en una fila del teatro y el tiempo que tarda toda la gente en la fila en comprar los boletos.
11. La longitud de un rollo de cinta adhesiva y el número de tiras de 2 pulgadas que pueden obtenerse del rollo.
12. La velocidad de lectura de una persona y el tiempo que tarda en leer una novela.
13. El desplazamiento de pulgadas cúbicas y los caballos de fuerza de un motor.
14. La velocidad de una máquina podadora y el tiempo que se tarda en cortar el césped.

En los ejercicios 15 a 22, determine la cantidad indicada.

15. x varía directamente con z . Determine x cuando $z = 11$ y $k = 3$.
16. x varía directamente con y . Determine x cuando $y = 12$ y $k = 6$.
17. x varía inversamente con y . Determine x cuando $y = 25$ y $k = 5$.
18. R varía inversamente con W . Determine R cuando $W = 160$ y $k = 240$.
19. C varía directamente con el cuadrado de Z . Determine C cuando $Z = 5$ y $k = 2$.
20. L varía directamente con el cuadrado de R . Determine L cuando $R = 9$ y $k = 4$.
21. y varía inversamente con el cuadrado de x . Determine y cuando $x = 10$ y $k = 320$.
22. y varía inversamente con el cuadrado de w . Determine y cuando $w = 12$ y $k = 288$.

Para los ejercicios 23 a 30, determine la cantidad indicada.

23. x varía directamente con y . Si $x = 9$ cuando $y = 18$, determine x cuando $y = 36$.
24. Z varía directamente con W . Si $Z = 7$ cuando $W = 28$, determine Z cuando $W = 140$.
25. C varía inversamente con J . Si $C = 7$ cuando $J = 1$, determine C cuando $J = 2$.
26. H varía inversamente con L . Si $H = 15$ cuando $L = 50$, determine H cuando $L = 10$.
27. y varía directamente con el cuadrado de R . Si $y = 4$ cuando $R = 4$, determine y cuando $R = 8$.
28. A varía directamente con el cuadrado de B . Si $A = 245$ cuando $B = 7$, determine A cuando $B = 9$.
29. L varía inversamente con el cuadrado de P . Si L es 270 cuando $P = 10$, determine L cuando $P = 30$.
30. x varía inversamente con el cuadrado de P . Si $x = 10$ cuando $P = 6$, determine x cuando $P = 20$.

Solución de problemas

31. Suponga que a varía directamente con b . Si b se duplica, ¿cómo se afectará a ? Explique.
32. Suponga que a varía directamente con b^2 . Si b se duplica, ¿cómo se afectará a ? Explique.
33. Suponga que y varía inversamente con x . Si x se duplica, ¿cómo se afectará y ? Explique.
34. Suponga que y varía inversamente con a^2 . Si a se duplica, ¿cómo se afectará y ? Explique.

En los ejercicios 35 a 54, determine la cantidad que se le pide.

35. **Distancia y velocidad** La distancia, d , que un automóvil recorre es directamente proporcional a la velocidad, s , a la que el automóvil está viajando. Determine la distancia recorrida, si la constante de proporcionalidad, k , es 2 y la velocidad es de 40 millas por hora.
36. **Alberca** El tiempo, t , que tarda en llenarse una alberca es directamente proporcional a la cantidad de agua, w , que sale de la manguera. Determine el tiempo que tardará una manguera en llenar la alberca si la constante de proporcionalidad es 0.3 y la cantidad de agua que sale de la manguera es 100 galones por hora.

37. **Llegada a un destino** El tiempo, t , que toma llegar a cierto destino es inversamente proporcional a la velocidad, s , a la que un automóvil se desplaza. Determine el tiempo que tarda en llegar al destino si la constante de proporcionalidad es 100 y la velocidad, s , es 50 millas por hora.
38. **Luz a través del agua** El porcentaje de luz, l , que se filtra a través del agua es inversamente proporcional a la profundidad, d , del agua. Determine el porcentaje de luz que se filtra a una profundidad de 10 pies si la constante de proporcionalidad es 300.
39. **Velocidad de un automóvil** La distancia recorrida, d , en un automóvil es directamente proporcional a la velocidad, s , del automóvil. Si la distancia recorrida es 300 pies cuando la velocidad es 120 pies/minuto, determine la distancia recorrida cuando la velocidad es 150 pies/minuto.

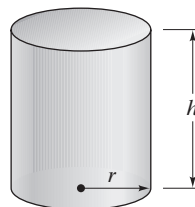


40. **Corte del césped** El tiempo, t , que tarda Don en cortar el césped, es directamente proporcional al área del césped, A . Si Don tarda 0.4 horas en cortar un área de 1200 pies cuadrados, ¿cuánto tardará en cortar un área de 2200 pies cuadrados?
41. **Colocación de una cerca** El tiempo, t , que toma cercar un gran campo es inversamente proporcional al número de personas, n , que trabajan en la cerca. Cuando 10 personas están trabajando en la cerca, toma 200 horas colocarla. ¿Cuánto tiempo les tomará a 15 personas colocar la cerca?
42. **Cocimiento de un pavo** El tiempo, t , que tarda en cocinar-se un pavo es inversamente proporcional a la temperatura del horno, T . Si tarda 3 horas en cocinarse un pavo a 300 °F, ¿cuánto tiempo tardará en cocinarse un pavo a 250 °F?
43. **Juego de baloncesto** La recaudación, r , en un juego de baloncesto es directamente proporcional al número de personas, n , que asisten al juego. Si la recaudación para un juego es de \$12,000 cuando asisten 800 personas, determine cuántas personas asisten, si la recaudación para un juego es de \$15,000.
44. **Periódico** El tiempo, t , que tarda en imprimirse un número específico de copias de un periódico es inversamente proporcional al número de prensas, n , que está trabajando. Cuando están trabajando 6 prensas, los periódicos se imprimen en 8 horas. Determine el número de prensas que están trabajando, si los periódicos se imprimen en 3 horas.

45. **Costo de una boda** El costo, c , de cierta boda es directamente proporcional al número, n , de personas que asisten. Si el costo es de \$4,000 cuando asisten 80 personas, ¿cuántas personas asisten si el costo es de \$3,000?



46. **Limpieza de ventanas** El tiempo, t , que toma limpiar todas las ventanas de un gran edificio de oficinas es inversamente proporcional al número de equipos, n , de limpiaventanas que se emplean. Si 6 equipos pueden limpiar todas las ventanas en 16 días, ¿cuántos equipos se utilizarán si las ventanas se limpian en 12 días?
47. **Área de un círculo** El área de un círculo, A , es directamente proporcional al cuadrado del radio, r , del círculo. Si el área de un círculo es de alrededor de 78.5 pulgadas cuadradas cuando el radio es de 5 pulgadas, determine el área cuando el radio es de 12 pulgadas.
48. **Objeto que cae** La velocidad, v , de un objeto que cae es directamente proporcional al cuadrado del tiempo, t , que ha estado en caída libre. Un objeto que ha estado en caída libre durante 2 segundos tiene una velocidad de 64 pies por segundo. Determine la velocidad de un objeto que ha caído durante 8 segundos.
49. **Circuito eléctrico** En un circuito eléctrico la resistencia, r , de un aparato es inversamente proporcional al cuadrado de la corriente, c . Si la resistencia es de 100 ohms, cuando la corriente es de 0.4 amperes, determine la resistencia si la corriente es de 0.6 amperes.
50. **Volumen de un cilindro** Para un cilindro de un volumen específico, la altura, h , del cilindro es inversamente proporcional al cuadrado del radio del cilindro, r . Cuando el radio es de 6 pulgadas, la altura es de 10 pulgadas. Determine la altura cuando el radio es de 5 pulgadas.



51. **Determinación del interés** La cantidad de interés generado en una inversión, I , varía directamente con la tasa de interés, r . Si el interés generado es \$40 cuando la tasa de interés es 4%, determine la cantidad de interés generada cuando la tasa de interés es 6%.

52. **Pared de ladrillos** El tiempo, t , requerido para construir una pared de ladrillos varía de manera inversa al número de personas, n , que trabajan en la pared. Si toma 8 horas a 5 albañiles en construir una pared, ¿cuánto tardarán 8 albañiles en construir la misma pared?
53. **Volumen de gas** El volumen de gas, V , varía inversamente con su presión, P . Si el volumen, V , es de 800 centímetros cúbicos cuando la presión es 200 milímetros (mm) de mercurio, determine el volumen cuando la presión es de 25 mm mercurio.

54. **Ley de Hooke** La ley de Hooke establece que la longitud, S , que un resorte se estirará, varía directamente con la fuerza (o peso), F , sujeta al resorte. Si un resorte se estira 1.4 pulgadas cuando se sujeta a él un peso de 20 libras, ¿cuánto se estirará cuando se sujeten a él 10 libras?

Problemas de reto

Además de la variación directa y la variación inversa, también existe la variación conjunta y la variación combinada. En la **variación conjunta** una cantidad puede variar directamente (con el producto de) dos o más cantidades. En la **variación combinada**, una cantidad puede variar directamente con algunas variables e inversamente con otras. El ejercicio 55 es un problema de variación conjunta, y el ejercicio 56 es un problema de variación combinada. Para los ejercicios 55 y 56, **a)** escriba la variación, y **b)** determine la cantidad que se indica.

55. x varía conjuntamente con y y z . Si x es 72 cuando $y = 18$ y $z = 2$, determine x cuando $y = 36$ y $z = 3$.

56. T varía directamente con el cuadrado de D e inversamente con F . Si $T = 18$ cuando $D = 6$ y $F = 4$, determine T cuando $D = 8$ y $F = 8$.

Ejercicios de repaso acumulativo

- [4.6] 57. Divida $\frac{8x^2 + 6x - 25}{4x + 9}$.

[5.1] 58. Factorice $y(z - 2) + 3(z - 2)$.
- [5.6] 59. Resuelva $3x^2 - 24 = -6x$.

[6.2] 60. Multiplique $\frac{x + 3}{x - 3} \cdot \frac{x^3 - 27}{x^2 + 3x + 9}$.

RESUMEN DEL CAPÍTULO			
Términos y frases importantes			
6.1 Expresión racional Signos de una fracción Simplificar una expresión racional	Restar expresiones racionales con un denominador común Sumar expresiones racionales con un denominador común	Sumar expresiones racionales con denominadores no comunes	6.7 Problemas de geometría Problemas de movimiento Problemas de trabajo
6.2 Dividir expresiones racionales Multiplicar expresiones racionales	6.4 Restar expresiones racionales con denominadores no comunes	6.5 Fracción compleja	6.8 Constante de proporcionalidad Variación Variación directa Variación inversa
6.3 Mínimo común denominador (mcd)		6.6 Ecuación racional Raíces extrañas o soluciones extrañas para una ecuación racional	(continúa en la página siguiente)

HECHOS IMPORTANTES

Para cualquier fracción:	$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}, b \neq 0$
Para sumar fracciones:	$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}, c \neq 0$
Para restar fracciones:	$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}, c \neq 0$
Para multiplicar fracciones:	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, b \neq 0, d \neq 0$
Para dividir fracciones:	$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}, b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$
Tiempo = $\frac{\text{distancia}}{\text{velocidad}}$	
Variación directa:	$y = kx$
Variación inversa:	$y = \frac{k}{x}$

Ejercicios de repaso del capítulo

[6.1] Determine los valores de la variable para los cuales están definidas las expresiones siguientes.

1. $\frac{5}{2x-12}$

2. $\frac{2}{x^2-8x+15}$

3. $\frac{2}{5x^2+4x-1}$

Simplifique.

4. $\frac{y}{xy-3y}$

5. $\frac{x^3+4x^2+12x}{x}$

6. $\frac{9x^2+6xy}{3x}$

7. $\frac{x^2+2x-8}{x-2}$

8. $\frac{a^2-36}{a-6}$

9. $\frac{-2x^2+7x+4}{x-4}$

10. $\frac{b^2-8b+15}{b^2-3b-10}$

11. $\frac{4x^2-11x-3}{4x^2-7x-2}$

12. $\frac{2x^2-21x+40}{4x^2-4x-15}$

[6.2] Multiplique.

13. $\frac{5a^2}{6b} \cdot \frac{2}{4a^2b}$

14. $\frac{15x^2y^3}{3z} \cdot \frac{6z^3}{5xy^3}$

15. $\frac{40a^3b^4}{7c^3} \cdot \frac{14c^5}{5a^5b}$

16. $\frac{1}{x-4} \cdot \frac{4-x}{3}$

17. $\frac{-m+4}{15m} \cdot \frac{10m}{m-4}$

18. $\frac{a-2}{a+3} \cdot \frac{a^2+4a+3}{a^2-a-2}$

Divida.

19. $\frac{16x^6}{y^2} \div \frac{x^4}{4y}$

20. $\frac{8xy^2}{z} \div \frac{x^4y^2}{4z^2}$

21. $\frac{5a+5b}{a^2} \div \frac{a^2-b^2}{a^2}$

22. $\frac{1}{a^2+8a+15} \div \frac{3}{a+5}$

23. $(t+8) \div \frac{t^2+5t-24}{t-3}$

24. $\frac{x^2+xy-2y^2}{4y} \div \frac{x+2y}{12y^2}$

[6.3] *Sume o reste.*

25. $\frac{n}{n+5} - \frac{5}{n+5}$

26. $\frac{3x}{x+7} + \frac{21}{x+7}$

27. $\frac{9x-4}{x+8} + \frac{76}{x+8}$

28. $\frac{7x-3}{x^2+7x-30} - \frac{3x+9}{x^2+7x-30}$

29. $\frac{5h^2+12h-1}{h+5} - \frac{h^2-5h+14}{h+5}$

30. $\frac{6x^2-4x}{2x-3} - \frac{-3x+12}{2x-3}$

Determine el mínimo común denominador (mcd) de cada expresión.

31. $\frac{a}{10} + \frac{4a}{3}$

32. $\frac{8}{x+3} + \frac{4x}{x+3}$

33. $\frac{5}{4xy^3} - \frac{7}{10x^2y}$

34. $\frac{6}{x+1} - \frac{3x}{x}$

35. $\frac{4}{n-5} + \frac{2n-3}{n-4}$

36. $\frac{7x-12}{x^2+x} - \frac{4}{x+1}$

37. $\frac{2r-9}{r-s} - \frac{6}{r^2-s^2}$

38. $\frac{4x^2}{x-7} + 8x^2$

39. $\frac{19x-5}{x^2+2x-35} + \frac{3x-2}{x^2+9x+14}$

[6.4] *Sume o reste.*

40. $\frac{4}{3y^2} + \frac{y}{2y}$

41. $\frac{2x}{xy} + \frac{1}{5x}$

42. $\frac{5x}{3xy} - \frac{4}{x^2}$

43. $6 - \frac{2}{x+2}$

44. $\frac{x-y}{y} - \frac{x+y}{x}$

45. $\frac{7}{x+4} + \frac{4}{x}$

46. $\frac{2}{3x} - \frac{3}{3x-6}$

47. $\frac{3}{(z+5)} + \frac{7}{(z+5)^2}$

48. $\frac{x+2}{x^2-x-6} + \frac{x-3}{x^2-8x+15}$

[6.2–6.4] *Realice cada operación que se indica.*

49. $\frac{x+4}{x+6} - \frac{x-5}{x+2}$

50. $3 + \frac{x}{x-4}$

51. $\frac{a+2}{b} \div \frac{a-2}{4b^2}$

52. $\frac{x+3}{x^2-9} + \frac{2}{x+3}$

53. $\frac{5p+10q}{p^2q} \cdot \frac{p^4}{p+2q}$

54. $\frac{4}{(x+2)(x-3)} - \frac{4}{(x-2)(x+2)}$

55. $\frac{x+7}{x^2+9x+14} - \frac{x-10}{x^2-49}$

56. $\frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{xy+x^2}{x^2-y^2}$

57. $\frac{3x^2-27y^2}{20} \div \frac{(x-3y)^2}{4}$

58. $\frac{a^2-9a+20}{a-4} \cdot \frac{a^2-8a+15}{a^2-10a+25}$

59. $\frac{a}{a^2-1} - \frac{2}{3a^2-2a-5}$

60. $\frac{2x^2+6x-20}{x^2-2x} \div \frac{x^2+7x+10}{4x^2-16}$

[6.5] *Simplifique cada fracción compleja.*

61. $\frac{3 + \frac{2}{3}}{\frac{3}{5}}$

62. $\frac{1 + \frac{5}{8}}{4 - \frac{9}{16}}$

63. $\frac{\frac{12ab}{9c}}{\frac{4a}{c^2}}$

64. $\frac{\frac{36x^4y^2}{9xy^5}}{\frac{4z^2}{4z^2}}$

65. $\frac{a - \frac{a}{b}}{\frac{1+a}{b}}$

66. $\frac{r^2 + \frac{1}{s}}{s^2}$

67. $\frac{\frac{4}{x} + \frac{2}{x^2}}{6 - \frac{1}{x}}$

68. $\frac{\frac{x}{x+y}}{\frac{x^2}{2x+2y}}$

69. $\frac{\frac{3}{x}}{\frac{3}{x^2}}$

70. $\frac{\frac{1}{a} + 2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a}}$

71. $\frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}$

72. $\frac{\frac{3x}{y} - x}{\frac{y}{x} - 1}$

[6.6] Resuelva.

$$73. \frac{5}{9} = \frac{5}{x+3}$$

$$76. \frac{3}{x} - \frac{1}{6} = \frac{1}{x}$$

$$79. \frac{x-3}{x-2} + \frac{x+1}{x+3} = \frac{2x^2+x+1}{x^2+x-6}$$

$$74. \frac{x}{6} = \frac{x-4}{2}$$

$$77. \frac{-4}{d} = \frac{3}{2} + \frac{4-d}{d}$$

$$80. \frac{a}{a^2-64} + \frac{4}{a+8} = \frac{3}{a-8}$$

$$75. \frac{n}{5} + 12 = \frac{n}{2}$$

$$78. \frac{1}{x-7} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{x^2-49}$$

$$81. \frac{d}{d-2} - 2 = \frac{2}{d-2}$$

[6.7] Resuelva.

82. **Castillos de arena** John y Amy Brogan tardan 6 horas en construir un castillo de arena. Paul y Cindy Carter tardan 5 horas en construir el mismo castillo de arena. ¿Cuánto tiempo tardarán las cuatro personas, juntas, en construir el castillo de arena?



83. **Llenado de una piscina** Una manguera de $\frac{3}{4}$ de pulgada de diámetro puede llenar una piscina en 7 horas. Una manguera de $\frac{5}{16}$ de pulgada de diámetro puede sacar toda el agua de la piscina llena en 12 horas. ¿Cuánto tardará en llenarse la piscina si mientras una manguera está llenando, la otra está sacando el agua de la piscina?

84. **Suma de números** Un número es cinco veces mayor que otro. La suma de sus recíprocos es 6. Determine los números.

85. **Patinaje y ciclismo** Robert Johnston puede recorrer 3 millas en sus patines en línea en el mismo tiempo en que Tran Lee puede recorrer 8 millas en su bicicleta de montaña. Si la velocidad de Tran es 3.5 millas por hora más rápido que la de Robert en sus patines, determine la velocidad de cada uno de ellos.

[6.8]

86. **Dosis de droga** La dosis recomendada, d , del antibiótico vancomicina, es directamente proporcional al peso, w , de la persona. Si Carmen Brown, quien pesa 132 libras se le administra 2376 miligramos, determine la dosis recomendada para Bill Glenn, quien tiene un peso de 172 libras.

87. **Velocidad de un corredor** El tiempo, t , que tarda un corredor en cubrir una distancia específica es inversamente proporcional a la velocidad del corredor. Si Nhat Chung corre a un promedio de 6 millas por hora, terminará una carrera en 1.4 horas. ¿Cuánto tardará Leif Lundgren, en terminar la misma carrera, si corre a 5 millas por hora?

Examen de práctica del capítulo

Simplifique.

$$1. \frac{-6+x}{x-6}$$

$$2. \frac{x^3-1}{x^2-1}$$

Realice cada una de las operaciones que se indican.

$$3. \frac{15x^2y^3}{4z^2} \cdot \frac{8xz^3}{5xy^4}$$

$$4. \frac{a^2-9a+14}{a-2} \cdot \frac{a^2-4a-21}{(a-7)^2}$$

$$5. \frac{x^2-x-6}{x^2-9} \cdot \frac{x^2-6x+9}{x^2+4x+4}$$

$$6. \frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{2x+4}{2-2x^2}$$

$$7. \frac{x^2-4y^2}{3x+12y} \div \frac{x+2y}{x+4y}$$

$$8. \frac{15}{y^2+2y-15} \div \frac{3}{y-3}$$

$$9. \frac{m^2+3m-18}{m-3} \div \frac{m^2-8m+15}{3-m}$$

$$10. \frac{4x+3}{2y} + \frac{2x-5}{2y}$$

$$11. \frac{7x^2-4}{x+3} - \frac{6x+7}{x+3}$$

$$12. \frac{4}{xy} - \frac{3}{xy^3}$$

$$13. 4 - \frac{5z}{z-5}$$

$$14. \frac{x-5}{x^2-16} - \frac{x-2}{x^2+2x-8}$$

Simplifique.

$$15. \frac{5 + \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{5}}$$

$$16. \frac{x + \frac{x}{y}}{\frac{1}{x}}$$

$$17. \frac{2 + \frac{3}{x}}{\frac{2}{x} - 5}$$

Resuelva.

$$18. 6 + \frac{2}{x} = 7$$

$$19. \frac{2x}{3} - \frac{x}{4} = x + 1$$

$$20. \frac{x}{x-8} + \frac{6}{x-2} = \frac{x^2}{x^2 - 10x + 16}$$

Resuelva.

- 21. Trabajo en conjunto** El señor Jackson, en su tractor, puede limpiar un acre de campo en 8 horas. El señor Hackett, en su tractor, puede limpiar un acre de campo en 5 horas. Si trabajan juntos, ¿cuánto tiempo tardarán en limpiar un acre de campo?
- 22. Determinación de un número** La suma de un número positivo y su recíproco es 2. Determine el número.
- 23. Área de un triángulo** El área de un triángulo es de 27 pulgadas cuadradas. Si la altura es 3 pulgadas menor que 2 veces la base, determine la altura y la base del triángulo.
- 24. Ejercicio** LaConya Bertrell ejercita durante $1\frac{1}{2}$ horas diariamente. Durante la primera parte de su rutina, ella conduce una bicicleta y promedia 10 millas por hora. Durante el resto del tiempo, ella patina y promedia 4 millas por hora. Si la distancia total que recorre es 12 millas, ¿qué distancia recorre en patines?

- 25. Composición musical** La longitud de onda de las ondas de sonido, w , es inversamente proporcional a la frecuencia, f (o tono). Si una frecuencia de 263 ciclos por segundo (media C en un piano) produce una longitud de onda de alrededor de 4.3 pies, determine la longitud de onda de una frecuencia de 1000 ciclos por segundo.



Examen de repaso acumulativo

Resuelva el siguiente examen y confronte sus respuestas con las que aparecen al final del examen. Repase cualquier pregunta que haya respondido de manera incorrecta. La sección y el objetivo en donde se estudió el material se indica a continuación de la respuesta.

- Evalúe $3x^2 - 5xy^2 + 3$ cuando $x = -4$ y $y = -2$.
- Resuelva la ecuación $5z + 4 = -3(z - 7)$.
- Simplifique $\left(\frac{8x^6y^3}{2x^5y^5}\right)^3$.
- Despeje R de la fórmula $P = 2E + 3R$.
- Simplifique $(6x^2 - 3x - 5) - (-2x^2 - 8x - 9)$.
- Multiplique $(3n^2 - 4n + 3)(2n - 5)$.
- Factorice $6a^2 - 6a - 5a + 5$.
- Factorice $13x^2 + 26x - 39$.
- Evalúe $[7 - [3(8 \div 4)]^2 + 9 \cdot 4]^2$.
- Resuelva $2(x + 3) \leq -(x + 5) - 1$ y grafique la solución en una recta numérica.

$$11. \text{Divida } \frac{4x - 34}{8}.$$

$$12. \text{Resuelva } 2x^2 = 11x - 12.$$

$$13. \text{Multiplique } \frac{x^2 - 9}{x^2 - x - 6} \cdot \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 - 7x - 4}.$$

$$14. \text{Reste } \frac{r}{r+2} - \frac{6}{r-5}.$$

$$15. \text{Sume } \frac{4}{x^2 - 3x - 10} + \frac{2}{x^2 + 5x + 6}.$$

$$16. \text{Resuelva la ecuación } \frac{x}{9} - \frac{x}{6} = \frac{1}{12}.$$

$$17. \text{Resuelva la ecuación } \frac{7}{x+3} + \frac{5}{x+2} = \frac{5}{x^2 + 5x + 6}.$$

18. Planes médicos Un distrito escolar permite a sus empleados elegir entre dos planes médicos. Con el plan 1, el empleado paga 10% de todas las facturas médicas (el distrito escolar paga el saldo). Con el plan 2, el empleado paga al distrito escolar \$100, y luego el empleado paga 5% de todas las facturas médicas. ¿Cuál es el total de facturas médicas que tendrían como resultado que el empleado pague la misma cantidad con los dos planes?

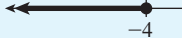
19. Alimento para aves El propietario de una tienda de alimento para aves desea hacer su propia fórmula de alimento para aves, mediante la mezcla de semillas de girasol, que cuesta \$0.50 cada libra, con un alimento premezclado surtido que cuesta \$0.15 cada libra. ¿Cuántas libras de cada uno tendrá que utilizar para obtener 50 libras de la mezcla con un costo de \$14.50?

20. Veleo Durante la primera etapa de una carrera, el velero *Thumper* navegó a una velocidad promedio de 6.5 millas por hora. Durante la segunda etapa de la carrera, el vien-

to aumentó y el *Thumper* navegó a una velocidad promedio de 9.5 millas por hora. Si la distancia total navegada por el *Thumper* fue de 12.75 millas, y el tiempo total que utilizó fue de 1.5 horas, determine la distancia recorrida por el *Thumper* en cada etapa de la carrera.



Respuestas al examen de repaso acumulativo

1. 131; [Sec. 1.9, Obj. 6] 2. $\frac{17}{8}$; [Sec. 2.5, Obj. 1] 3. $\frac{64x^3}{y^6}$; [Sec. 4.1, Obj. 3] 4. $R = \frac{P - 2E}{3}$; [Sec. 3.1, Obj. 3]
5. $8x^2 + 5x + 4$; [Sec. 4.4, Obj. 3] 6. $6n^3 - 23n^2 + 26n - 15$; [Sec. 4.5, Obj. 6] 7. $(6a - 5)(a - 1)$; [Sec. 5.2, Obj. 1]
8. $13(x + 3)(x - 1)$; [Sec. 5.3, Obj. 2] 9. 49; [Sec. 1.9, Obj. 5] 10. $x \leq -4$, ; [Sec. 2.7, Obj. 1]
11. $\frac{1}{2}x - \frac{17}{4}$; [Sec. 4.6, Obj. 1] 12. $4\frac{3}{2}$; [Sec. 5.6, Obj. 2] 13. $\frac{x + 3}{2x + 1}$; [Sec. 6.2, Obj. 1] 14. $\frac{r^2 - 11r - 12}{(r + 2)(r - 5)}$; [Sec. 6.4, Obj. 1]
15. $\frac{6x + 2}{(x - 5)(x + 2)(x + 3)}$; [Sec. 6.4, Obj. 1] 16. $-\frac{3}{2}$; [Sec. 6.6, Obj. 1] 17. No hay solución; [Sec. 6.6, Obj. 2]
18. \$2,000; [Sec. 3.3, Obj. 4] 19. 20 libras de semilla de girasol, 30 libras del alimento premezclado; [Sec. 3.5, Obj. 4] 20. Primera etapa: 3.25 millas, segunda etapa: 9.5 millas; [Sec. 3.5, Obj. 2].

Capítulo 8

Sistemas de ecuaciones lineales



- 8.1** Solución gráfica de sistemas de ecuaciones
- 8.2** Solución de sistemas de ecuaciones por el método de sustitución
- 8.3** Solución de sistemas de ecuaciones por el método de suma y resta
- 8.4** Sistemas de ecuaciones: aplicación y solución de problemas
- 8.5** Solución de sistemas de desigualdades lineales

Resumen del capítulo
Ejercicios de repaso del capítulo
Examen de práctica del capítulo
Examen de repaso acumulativo

En la actualidad, las decisiones financieras se tienen que tomar todos los días. Con frecuencia el conocimiento de sistemas de ecuaciones es útil en la toma de tales decisiones. Como en el caso del ejemplo 6 de la página 515, explicamos cómo utilizar un sistema de ecuaciones para seleccionar un sistema de seguridad de una compañía, y en el ejercicio 35, en la página 525, utilizamos un sistema de ecuaciones para decidir si es adecuado refinanciar una casa. En este capítulo verá muchos ejemplos de cómo aplicar el sistema de ecuaciones a la vida real.



Avance de la lección

En este capítulo aprenderemos a expresar problemas de aplicación como sistemas de ecuaciones lineales, así como la forma de resolverlos. La solución para un sistema de ecuaciones es el valor o los valores que satisfacen todas las ecuaciones del sistema.

También explicaremos tres procedimientos para resolver sistemas de ecuaciones. En la sección 8.1 resolveremos sistemas por medio de gráficas; en la sección 8.2, por el método de sustitución, y en la sección 8.3, por el método de suma y resta (reducción o eliminación). En la sección 8.4 explicamos cómo expresar algunos problemas de aplicación de la vida real como sistemas de ecuaciones lineales. Finalmente, en la sección 8.5, con base en la solución gráfica, presentada en la sección 8.1, resolveremos sistemas de *desigualdades* lineales de forma gráfica.

Para tener un buen desempeño en la sección 8.1, Solución gráfica de sistemas de ecuaciones, necesita comprender el procedimiento de graficación de rectas, presentado en las secciones 7.2 a 7.4. Para tener éxito en la sección 8.5, Solución de sistemas de desigualdades lineales, necesita comprender cómo graficar desigualdades lineales, tema presentado en la sección 7.5.

8.1 SOLUCIÓN GRÁFICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES



- 1 Determinar si un par ordenado es una solución de un sistema de ecuaciones.
- 2 Determinar si un sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente.
- 3 Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones.

1 Determinar si un par ordenado es una solución de un sistema de ecuaciones

Cuando buscamos una solución común para dos o más ecuaciones lineales, éstas se denominan **sistema de ecuaciones lineales**. Un ejemplo de un sistema de ecuaciones lineales es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} (1) y = x + 5 \\ (2) y = 2x + 4 \end{array} \right\} \text{ Sistema de ecuaciones lineales.}$$

La **solución de un sistema de ecuaciones** es el par o pares ordenados que satisfacen todas las ecuaciones en el sistema. La solución para el sistema anterior es (1, 6).

Comprobación En la ecuación (1) En la ecuación (2)

(1, 6)	(1, 6)
$y = x + 5$	$y = 2x + 4$
$6 \stackrel{?}{=} 1 + 5$	$6 \stackrel{?}{=} 2(1) + 4$
$6 = 6$ Verdadero.	$6 = 6$ Verdadero.

Puesto que el par ordenado (1, 6) satisface *ambas* ecuaciones, es una solución para el sistema de ecuaciones. Observe que el par ordenado (2, 7) satisface la primera ecuación pero no la segunda.

Comprobación En la ecuación (1) En la ecuación (2)

(2, 7)	(2, 7)
$y = x + 5$	$y = 2x + 4$
$7 \stackrel{?}{=} 2 + 5$	$7 \stackrel{?}{=} 2(2) + 4$
$7 = 7$ Verdadero.	$7 = 8$ Falso.

Como el par ordenado (2, 7) no satisface *ambas* ecuaciones, *no* es una solución para el sistema de ecuaciones.

EJEMPLO 1 Determine cuáles de los siguientes pares ordenados satisfacen el sistema de ecuaciones.

$$y = 2x - 8$$

$$2x + y = 4$$

- a)** $(1, -6)$ **b)** $(3, -2)$

Solución **a)** En cada ecuación, sustituya 1 por x y -6 por y .

$$y = 2x - 8$$

$$-6 \stackrel{?}{=} 2(1) - 8$$

$$-6 \stackrel{?}{=} 2 - 8$$

$$-6 = -6 \quad \text{Verdadero.}$$

$$2x + y = 4$$

$$2(1) + (-6) \stackrel{?}{=} 4$$

$$2 - 6 \stackrel{?}{=} 4$$

$$-4 = 4 \quad \text{Falso.}$$

Como $(1, -6)$ no satisface ambas ecuaciones, no es una solución para el sistema de ecuaciones.

b) En cada ecuación, sustituya 3 por x y -2 por y .

$$y = 2x - 8$$

$$-2 \stackrel{?}{=} 2(3) - 8$$

$$-2 \stackrel{?}{=} 6 - 8$$

$$-2 = -2 \quad \text{Verdadero.}$$

$$2x + y = 4$$

$$2(3) + (-2) \stackrel{?}{=} 4$$

$$6 - 2 \stackrel{?}{=} 4$$

$$4 = 4 \quad \text{Verdadero.}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 13**

Como $(3, -2)$ satisface ambas ecuaciones, es una solución para el sistema de ecuaciones lineales. 

En este capítulo analizamos tres métodos para determinar la solución para un sistema de ecuaciones; el *método gráfico*, el *método por sustitución* y el *método de suma y resta (reducción o por eliminación)*. En esta sección analizamos el método gráfico.

2 Determinar si un sistema de ecuaciones es consistente, inconsistente o dependiente

La **solución para un sistema de ecuaciones lineales** es el par (o pares) ordenados comunes a todas las rectas del sistema cuando las graficamos. Al graficar dos rectas, son posibles tres situaciones, como se ilustra en la figura 8.1.

En la figura 8.1a, las rectas 1 y 2 no son paralelas; se intersectan en un punto. Este sistema de ecuaciones tiene *exactamente una solución*, y es un ejemplo de un **sistema consistente de ecuaciones**, que es el que tiene una solución.

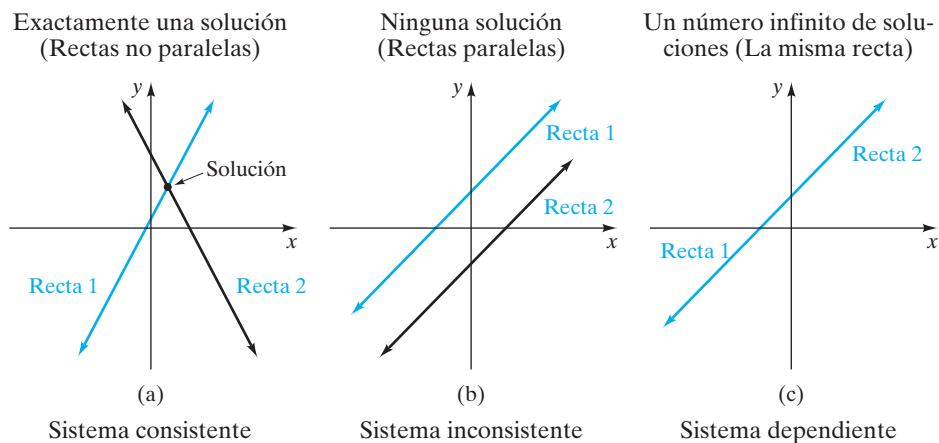


FIGURA 8.1

En la figura 8.1b, las rectas 1 y 2 son dos paralelas diferentes. Las rectas no se intersecan, y este sistema de ecuaciones *no tiene solución*; éste es un ejemplo de un **sistema inconsistente de ecuaciones**, un sistema que no tiene soluciones.

En la figura 8.1c, las rectas 1 y 2 en realidad son la misma recta. En este caso, todo punto en la recta satisface ambas ecuaciones y es una solución para el sistema de ecuaciones. Este sistema tiene *un número infinito de soluciones* y es un ejemplo de un **sistema dependiente de ecuaciones**, que tiene un número infinito de soluciones. Si un sistema de dos ecuaciones lineales es dependiente, entonces ambas ecuaciones representan la misma recta. *Observe que un sistema dependiente también es consistente, ya que tiene una solución.*

Podemos determinar si un sistema de ecuaciones lineales es consistente, inconsistente o dependiente, escribiendo cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen y comparando las pendientes y las intersecciones con y . Si las pendientes de las rectas son diferentes (figura 8.1a), el sistema es consistente. Si las pendientes son iguales pero las intersecciones con y son diferentes (figura 8.1b), el sistema es inconsistente. Si tanto las pendientes como las intersecciones con y son iguales (figura 8.1c), el sistema es dependiente.

EJEMPLO 2 Determine si el sistema siguiente tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

$$2x + 4y = -16$$

$$-8y = 4x - 12$$

Solución Escriba cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen y luego compare las pendientes y las intersecciones con y .

$$2x + 4y = -16$$

$$-8y = 4x - 12$$

$$4y = -2x - 16$$

$$y = \frac{4x - 12}{-8}$$

$$y = \frac{-2x - 16}{4}$$

$$y = -\frac{4}{8}x + \frac{12}{8}$$

$$y = -\frac{2}{4}x - \frac{16}{4}$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

$$y = -\frac{1}{2}x - 4$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 29**

Como las rectas tienen la misma pendiente, $-\frac{1}{2}$, y diferentes intersecciones con y , son paralelas. Por tanto, este sistema de ecuaciones es inconsistente y no tiene solución. 

3 Resolver gráficamente un sistema de ecuaciones

Ahora veremos cómo resolver gráficamente sistemas de ecuaciones.

Para obtener la solución para un sistema de ecuaciones

Grafique cada ecuación y determine el punto o puntos de intersección.

EJEMPLO 3 Resolver gráficamente el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + y = 11$$

$$x + 3y = 18$$

Solución Determine las intersecciones con x y con y de cada gráfica; luego dibuje las rectas.

$2x + y = 11$	Par ordenado	$x + 3y = 18$	Par ordenado
Sea $x = 0$; entonces $y = 11$	$(0, 11)$	Sea $x = 0$; entonces $y = 6$	$(0, 6)$
Sea $y = 0$; entonces $x = \frac{11}{2}$	$\left(\frac{11}{2}, 0\right)$	Sea $y = 0$; entonces $x = 18$	$(18, 0)$

Las dos rectas (figura 8.2) parecen intersectarse en el punto $(3, 5)$. Este punto podría ser la solución para el sistema de ecuaciones. Sin embargo, para estar seguros, debemos comprobar que satisface *ambas* ecuaciones.

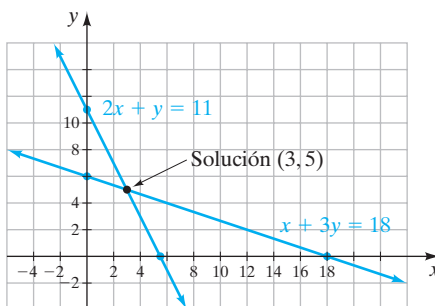


FIGURA 8.2

Comprobación	$2x + y = 11$	$x + 3y = 18$
	$2(3) + 5 \stackrel{?}{=} 11$	$3 + 3(5) \stackrel{?}{=} 18$
	$11 = 11$ Verdadero.	$18 = 18$ Verdadero.

Como el par ordenado $(3, 5)$ satisface ambas ecuaciones, es la solución para el sistema de ecuaciones. Este sistema es consistente.

EJEMPLO 4 Resuelva en forma gráfica el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + y = 3 \quad 4x + 2y = 12$$

Solución Determine las intersecciones x y y de cada gráfica; luego dibuje las rectas.

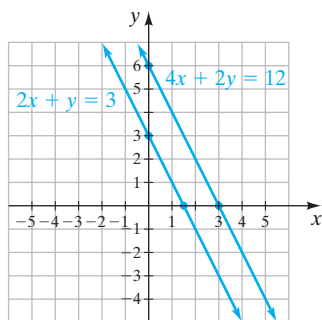


FIGURA 8.3

$2x + y = 3$	Par ordenado	$4x + 2y = 12$	Par ordenado
Sea $x = 0$; entonces $y = 3$	$(0, 3)$	Sea $x = 0$; entonces $y = 6$	$(0, 6)$
Sea $y = 0$; entonces $x = \frac{3}{2}$	$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$	Sea $y = 0$; entonces $x = 3$	$(3, 0)$

Las dos rectas (figura 8.3) parecen paralelas.

Para mostrar que las dos rectas en realidad son paralelas, escriba cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen.

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3 & 4x + 2y &= 12 \\ y &= -2x + 3 & 2y &= -4x + 12 \\ & & y &= -2x + 6 \end{aligned}$$

Ambas ecuaciones tienen la misma pendiente, -2 , y diferentes intersecciones con y ; por tanto, las rectas deben ser paralelas. Como las rectas paralelas no se intersectan, este sistema de ecuaciones no tiene solución. Este sistema es inconsistente.

EJEMPLO 5 Resuelva de forma gráfica el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{2}y &= 2 \\y &= 2x - 4\end{aligned}$$

Solución Determine las intersecciones con x y con y de cada gráfica; luego dibuje las rectas.

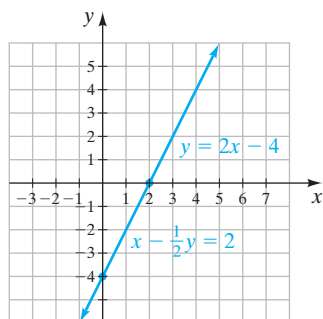


FIGURA 8.4

$$x - \frac{1}{2}y = 2$$

Par
ordenado

$$y = 2x - 4$$

Par
ordenado

Sea $x = 0$; entonces $y = -4$ $(0, -4)$ Sea $x = 0$; entonces $y = -4$ $(0, -4)$
Sea $y = 0$; entonces $x = 2$ $(2, 0)$ Sea $y = 0$; entonces $x = 2$ $(2, 0)$

Puesto que las rectas tienen las mismas intersecciones con x y con y , ambas ecuaciones representan a la misma recta (figura 8.4). Cuando escribimos las ecuaciones en la forma pendiente-ordenada al origen, vemos claramente que son idénticas y el sistema es dependiente.

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{2}y &= 2 & y &= 2x - 4 \\2\left(x - \frac{1}{2}y\right) &= 2(2) \\2x - y &= 4 \\-y &= -2x + 4 \\y &= 2x - 4\end{aligned}$$

La solución para este sistema de ecuaciones es el conjunto de todos los puntos en la recta.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 53

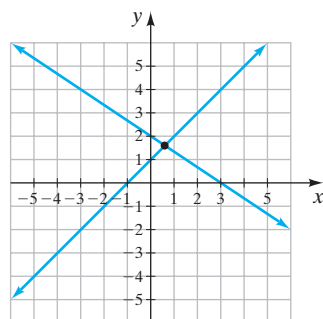


FIGURA 8.5

Cuando graficamos un sistema de ecuaciones, no siempre es fácil leer de la gráfica la intersección de las rectas. Por ejemplo, ¿podría estimar la solución del sistema de ecuaciones mostrado en la figura 8.5? Podría estimar que fuera $(\frac{7}{10}, \frac{3}{2})$ cuando en realidad es $(\frac{4}{5}, \frac{8}{5})$. La precisión de la respuesta dependerá de qué tan cuidadosamente trace las gráficas y de la escala utilizada. En la sección 8.2 presentamos un método algebraico que proporciona las soluciones exactas para sistemas de ecuaciones.



Uso de la calculadora graficadora

Una calculadora graficadora puede utilizarse para resolver o comprobar sistemas de ecuaciones. Para resolver de forma gráfica un sistema, grafique ambas ecuaciones, como explicamos en el capítulo 7. El punto o puntos de intersección de las gráficas es la solución para el sistema de ecuaciones.

El primer paso al resolver el sistema en una calculadora graficadora es despejar y en cada ecuación. Por ejemplo, considere el sistema de ecuaciones dado en el ejemplo 3.

Sistema de ecuaciones	y despejada en la ecuación
$2x + y = 11$	$y = -2x + 11$
$x + 3y = 18$	$y = -\frac{1}{3}x + 6$

(continúa en la página siguiente)

$$\text{Sea } Y_1 = -2x + 11$$

$$Y_2 = -\frac{1}{3}x + 6$$

La figura 8.6 muestra la pantalla de una TI-83 Plus con estas dos ecuaciones graficadas.

Para determinar la intersección de las dos rectas, puede utilizar las teclas **TRACE** o **ZOOM** o la característica TABLE como explicamos anteriormente. La figura 8.7 muestra una tabla de valores para las ecuaciones y_1 y y_2 . Observe que cuando $x = 3$, tanto Y_1 como Y_2 tienen el mismo valor, 5. Por tanto, las gráficas se intersecan en $(3, 5)$ y ésta es la solución.

Algunas calculadoras graficadoras tienen una característica que muestra la intersección de rectas presionando una secuencia de teclas. Por ejemplo, en la TI-83 Plus, si va a CALC (que utilizamos para calcular) presionando **2nd** **TRACE**, obtiene la pantalla mostrada en la figura 8.8. Ahora presione **5**, *interse-*

FIRST CURVE? [*¿Primera curva?*]

En este momento, mueva el cursor a lo largo de la primera curva hasta que esté cerca del punto de intersección. Luego presione **ENTER**. Ahora la calculadora muestra

SECOND CURVE? [*¿Segunda curva?*]

y tiene el cursor en la segunda curva. Si el cursor no está cerca del punto de intersección, muévelo a lo largo de esta curva hasta que lo esté. Luego presione **ENTER**. Ahora la calculadora muestra

GUESS? [*¿Estimación?*]

Ahora presione **ENTER** y aparecerá el punto de intersección (vea la figura 8.9). El punto de intersección es $(3, 5)$.

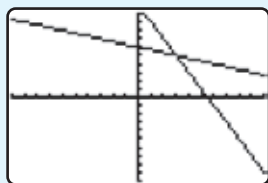


FIGURA 8.6

X	Y1	Y2
0	11	6
1	9	5.3333
2	7	4.6667
3	5	4
4	3	3.3333
5	1	2.6667
6	-1	2
X=3		

FIGURA 8.7

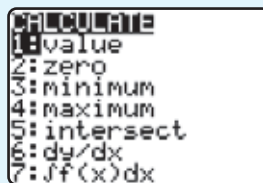


FIGURA 8.8

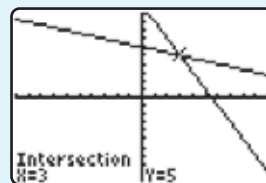


FIGURA 8.9

Ejercicios

Utilice su calculadora graficadora para determinar la solución para cada sistema de ecuaciones. Las respuestas no enteras redondéelas al décimo más cercano.

- $x + 2y = -11$
 $2x - y = -2$
- $x - 3y = -13$
 $-2x - 2y = 2$
- $2x - y = 7.7$
 $-x - 3y = 1.4$
- $3x + 2y = 7.8$
 $-x + 3y = 15.0$

En el ejemplo 5 de la sección 3.3, resolvimos un problema que incluía sistemas de seguridad con una sola variable. En el siguiente ejemplo resolveremos ese mismo problema utilizando dos variables e ilustrando la solución en forma gráfica. Aunque en ocasiones podemos obtener una respuesta con mayor facilidad usando una sola variable, una gráfica de la situación puede ayudarle a visualizar mejor el panorama completo.

EJEMPLO 6 Sistemas de seguridad Meghan O'Donnell planea instalar un sistema de seguridad en su casa. Ella ha reducido sus opciones a dos vendedores: Moneywell y Doile. El sistema de Moneywell cuesta \$3,580 la instalación y el costo de monitoreo es de \$20 mensuales. El sistema equivalente de Doile sólo cuesta \$2,620, pero el costo de monitoreo es de \$32 mensuales.

- a) Suponiendo que los costos de monitoreo no cambian, ¿en cuántos meses el costo total de los sistemas Moneywell y Doile serán iguales?
- b) Si ambos vendedores garantizan que no subirán su costo mensual durante 10 años, y si Meghan planea utilizar el sistema durante 10 años, ¿cuál sistema sería menos costoso?

Solución



- a) **Entender y traducir** Necesitamos determinar el número de meses después de los cuales ambos sistemas tendrán el mismo costo total.

Sea n = número de meses

c = costo total del sistema de seguridad durante n meses.

Ahora, por medio de las variables c y n , podemos plantear una ecuación para representar el costo de cada sistema.

Moneywell

$$\text{Costo total} = \left(\begin{array}{c} \text{costo} \\ \text{inicial} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{gasto durante} \\ n \text{ meses} \end{array} \right)$$

$$c = 3,580 + 20n$$

Doile

$$\text{Costo total} = \left(\begin{array}{c} \text{costo} \\ \text{inicial} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{gasto durante} \\ n \text{ meses} \end{array} \right)$$

$$c = 2,620 + 32n$$

Por tanto, nuestro sistema de ecuaciones es

$$c = 3,580 + 20n$$

$$c = 2,620 + 32n$$

Calcular Ahora grafique cada ecuación. Las siguientes son tablas de valores. La figura 8.10 muestra las gráficas de las ecuaciones

$$c = 3,580 + 20n$$

Sea $n = 0$	$c = 3,580 + 20(0) = 3,580$
Sea $n = 100$	$c = 3,580 + 20(100) = 5,580$
Sea $n = 160$	$c = 3,580 + 20(160) = 6,780$

n	c
0	3,580
100	5,580
160	6,780

$$c = 2,620 + 32n$$

Sea $n = 0$	$c = 2,620 + 32(0) = 2,620$
Sea $n = 100$	$c = 2,620 + 32(100) = 5,820$
Sea $n = 160$	$c = 2,620 + 32(160) = 7,740$

n	c
0	2,620
100	5,820
160	7,740

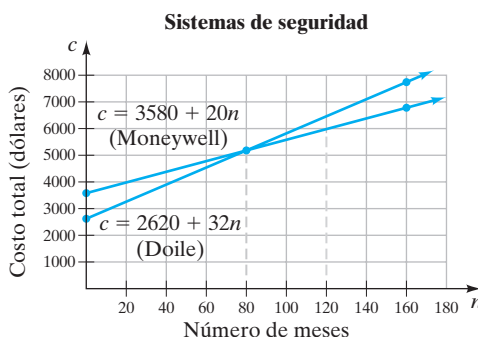


FIGURA 8.10

Revisar y responder La gráfica (figura 8.10) muestra que el costo total de los dos sistemas de seguridad sería el mismo en 80 meses. Ésta es la misma respuesta que obtuvimos en el ejemplo 5 de la sección 3.3.

b) Como 10 años son 120 meses, dibujamos una recta vertical punteada en $n = 120$ meses, y vemos en dónde interseca a las dos rectas. Como en 120 meses la recta Doile está más arriba que la recta Moneywell, el costo para el sistema Doile durante 120 meses es mayor que el costo del sistema Moneywell. Por tanto, el costo del sistema Moneywell es menos costoso para 10 años. 

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 71**

En la sección 8.4 analizaremos más aplicaciones de sistemas de ecuaciones.

SUGERENCIA

Podemos resolver una ecuación con una variable por medio de un sistema de ecuaciones lineales. Considere la ecuación $3x - 1 = x + 1$. Su solución es 1, como ilustramos a continuación.

$$\begin{aligned} 3x - 1 &= x + 1 \\ 2x - 1 &= 1 \\ 2x &= 2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Igualemos y en cada lado de la ecuación $3x - 1 = x + 1$, para obtener el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} y &= 3x - 1 \\ y &= x + 1 \end{aligned}$$

Ilustramos la solución gráfica de este sistema de ecuaciones en la figura 8.11.

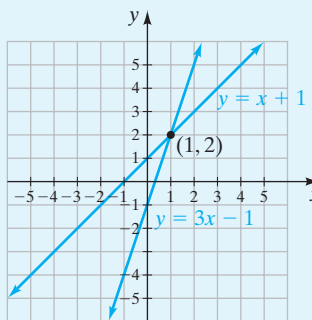


FIGURA 8.11

La solución para el sistema es $(1, 2)$. Observe que la coordenada x de la solución del sistema, 1, es la solución para el sistema lineal con una variable, $3x - 1 = x + 1$. Si tiene una ecuación difícil de resolver y tiene una calculadora graficadora, puede resolver la ecuación con ella. La coordenada x de la solución para el sistema será la solución de la ecuación lineal con una variable.

Conjunto de ejercicios 8.1

Ejercicios conceptuales

1. ¿Qué representa la solución de un sistema de ecuaciones?
2. **a)** ¿Qué es un sistema consistente de ecuaciones?
b) ¿Qué es un sistema inconsistente de ecuaciones?
3. Explique, sin graficar, cómo determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.
4. ¿Qué es un sistema dependiente de ecuaciones?

4. Cuando graficamos un sistema dependiente de dos ecuaciones lineales, ¿cuál será el resultado?
5. Explique por qué podría ser difícil obtener gráficamente una respuesta exacta para un sistema de ecuaciones.
6. Un sistema dependiente de ecuaciones, ¿es un sistema consistente o inconsistente? Explique.

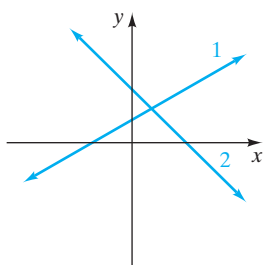
Práctica de habilidades

Determine cuál de los siguientes pares ordenados, si lo hay, satisface cada sistema de ecuaciones lineales.

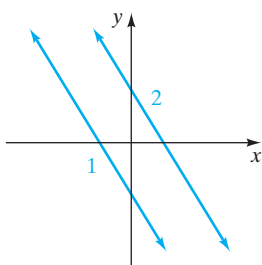
7. $y = 4x - 6$
 $y = -2x$
a) $(-1, -10)$ b) $(3, 0)$ c) $(1, -2)$
8. $y = -4x$
 $y = -2x + 8$
a) $(0, 0)$ b) $(-4, 16)$ c) $(2, -8)$
9. $y = 2x - 3$
 $y = x + 5$
a) $(8, 13)$ b) $(4, 5)$ c) $(4, 9)$
10. $x + 2y = 4$
 $y = 3x + 3$
a) $(0, 2)$ b) $(-2, 3)$ c) $(4, 15)$
11. $2x + y = 9$
 $5x + y = 10$
a) $(3, 3)$ b) $(2, 0)$ c) $(4, 1)$
12. $y = 2x + 4$
 $y = 2x - 1$
a) $(0, 4)$ b) $(3, 10)$ c) $(-2, 0)$
13. $2x - 3y = 6$
 $y = \frac{2}{3}x - 2$
a) $(3, 0)$ b) $(3, -2)$ c) $(6, 2)$
14. $y = -x + 5$
 $2y = -2x + 10$
a) $(6, -1)$ b) $(0, 5)$ c) $(5, -1)$
15. $3x - 4y = 8$
 $2y = \frac{2}{3}x - 4$
a) $(0, -2)$ b) $(1, -6)$ c) $(-\frac{1}{3}, -\frac{9}{4})$
16. $2x + 3y = 6$
 $-x + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}y$
a) $(\frac{1}{2}, \frac{5}{3})$ b) $(2, 1)$ c) $(\frac{9}{4}, \frac{1}{2})$

Identifique cada sistema de ecuaciones lineales (las rectas se marcaron como 1 y 2) como consistente, inconsistente o dependiente. Establezca si el sistema tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

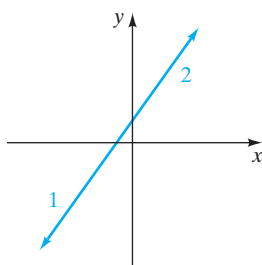
17.



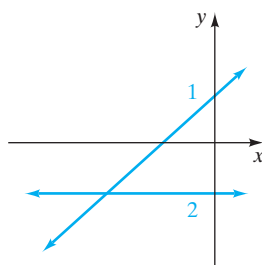
18.



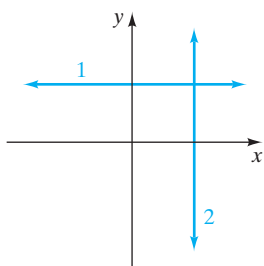
19.



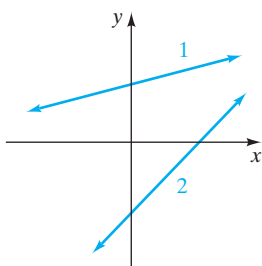
20.



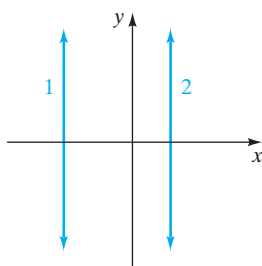
21.



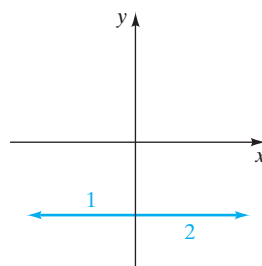
22.



23.



24.



Expresé cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen. Sin graficar las ecuaciones, establezca si el sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

- | | | |
|---|--|--|
| 25. $y = 3x - 1$
$3y = 4x - 6$ | 26. $x + y = 6$
$x - y = 6$ | 27. $2y = 3x + 3$
$y = \frac{3}{2}x - 2$ |
| 28. $y = \frac{1}{2}x + 4$
$2y = x + 8$ | 29. $2x = y - 6$
$4x = 4y + 5$ | 30. $x + 2y = 6$
$2x + y = 4$ |
| 31. $3x + 5y = -7$
$-3x - 5y = -7$ | 32. $x - y = 2$
$2x - 2y = -2$ | 33. $x = 3y + 4$
$2x - 6y = 8$ |
| 34. $x - y = 3$
$\frac{1}{2}x - 2y = -6$ | 35. $y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$
$3x - 2y = -\frac{1}{2}$ | 36. $2y = \frac{7}{3}x - 9$
$4y = 6x + 9$ |

Determine, de forma gráfica, la solución para cada sistema de ecuaciones. Si el sistema es dependiente o inconsistente, indíquelo.

- | | | |
|--|--|---|
| 37. $y = x + 3$
$y = -x + 3$ | 38. $y = 2x + 4$
$y = -3x - 6$ | 39. $y = 3x - 6$
$y = -x + 6$ |
| 40. $y = 2x - 1$
$2y = 4x + 6$ | 41. $2x = 4$
$y = -3$ | 42. $x + 2y = 6$
$2y = 2x - 6$ |
| 43. $y = -x + 5$
$-x + y = 1$ | 44. $2x + y = 6$
$2x - y = -2$ | 45. $y = -\frac{1}{2}x + 4$
$x + 2y = 6$ |
| 46. $x + 2y = -4$
$2x - y = -3$ | 47. $x + 2y = 8$
$5x + 2y = 0$ | 48. $4x - y = 5$
$2y = 8x - 10$ |
| 49. $2x + 3y = 6$
$4x = -6y + 12$ | 50. $2x + 3y - 6 = 0$
$2x - 2y = 6$ | 51. $y = 3$
$y = 2x - 3$ |
| 52. $x = 4$
$y = 2x - 6$ | 53. $x - 2y = 4$
$2x - 4y = 8$ | 54. $3x + y = -6$
$2x = 1 + y$ |
| 55. $2x + y = -2$
$6x + 3y = 6$ | 56. $y = 2x - 3$
$y = -x$ | 57. $4x - 3y = 6$
$2x + 4y = 14$ |
| 58. $2x + 6y = 6$
$y = -\frac{1}{3}x + 1$ | 59. $2x - 3y = 0$
$x + 2y = 0$ | 60. $4x = 4y - 12$
$-8x + 8y = 8$ |

Solución de problemas

- | | |
|--|---|
| 61. Dado el sistema de ecuaciones $6x - 4y = 12$ y $12y = 18x - 24$, determine, sin graficar, si las gráficas de las dos ecuaciones serán rectas paralelas. Explique cómo determinó su respuesta. | 63. Si un sistema de ecuaciones lineales tiene soluciones $(4, 3)$ y $(6, 5)$, ¿cuántas soluciones tendrá el sistema? Explique. |
| 62. Dado el sistema de ecuaciones $4x - 8y = 12$ y $2x - 8 = 4y$, determine, sin graficar, si las gráficas de las dos ecuaciones serán rectas paralelas. Explique cómo determinó su respuesta. | 64. Si la pendiente de una recta en un sistema de ecuaciones lineales es 2 y la pendiente de la segunda recta en el sistema es 3, ¿cuántas soluciones tiene el sistema? Explique. |
| | 65. Si dos rectas distintas son paralelas, ¿cuántas soluciones tiene el sistema? Explique. |

66. Si dos rectas diferentes en un sistema lineal de ecuaciones pasan por el origen, ¿el punto $(0, 0)$ es la solución del sistema? Explique.
67. Considere el sistema $x = 5$ y $y = 3$. ¿Cuántas soluciones tiene el sistema?, ¿cuál es la solución?
68. Un sistema de ecuaciones lineales tiene a $(2, 1)$ como su solución. Si una recta en el sistema es vertical y la otra horizontal, determine las ecuaciones del sistema.

En los ejercicios 69 a 72, determine la solución graficando el sistema de ecuaciones.

69. **Reparación de un horno** El horno de Edith Hall tiene 10 años y tiene un problema. La persona que lo reparará le indica a Edith que la reparación le costará \$600. Ella puede comprar un horno nuevo y más eficiente por \$1,800. Su horno actual promedia alrededor de \$650 anuales en costo de energía y el horno nuevo promediaría alrededor de \$450 al año.

Podemos representar el costo total, c , de reparación o reemplazo, más el costo en energía durante n años por medio del sistema de ecuaciones siguiente.

$$\begin{array}{ll} \text{(reparación)} & c = 600 + 650n \\ \text{(reemplazo)} & c = 1800 + 450n \end{array}$$

Determine el número de años, a partir de ahora, para que el costo de reparación sea igual al costo total de reemplazo.

70. **Sistemas de seguridad** Juan Vargas está considerando los dos sistemas de seguridad analizados en el ejemplo 6. Si el sistema Moneywell cuesta \$4,400 más \$15 al mes y el sistema Doile cuesta \$3,400 más \$25 al mes, ¿al cabo de cuántos meses el costo total de ambos sistemas será el mismo?
71. **Paseo en bote** Rudy tiene visitantes en su casa y quiere llevarlos a un paseo en embarcación por un día. Hay dos agencias de renta de embarcaciones en el lago. El alquiler de botes de Bob cobra \$25 por hora, lo cual incluye toda la gasolina que se utilice. La renta de Hopper cobra \$22 por hora más una tarifa fija de \$18 por la gasolina utilizada. Las ecuaciones que representan el costo total, c , son

las siguientes. En las ecuaciones, h representa el número de horas que las embarcaciones son alquiladas.

$$\begin{array}{l} c = 25h \\ c = 22h + 18 \end{array}$$

Determine el número de horas que las embarcaciones deben rentarse para que el costo total sea el mismo.



72. **Diseño de jardines** El servicio de jardinería Evergreen cobra una cuota por consulta de \$200 más \$60 por hora de mano de obra. El servicio de jardinería Out of Sight cobra una cuota por consulta de \$300 más \$40 por hora de mano de obra. Podemos representar esta situación con el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} c = 200 + 60h \\ c = 300 + 40h \end{array}$$

donde c es el costo total y h el número de horas de mano de obra. Determine el número de horas de mano de obra para que los dos servicios tengan el mismo costo total.



Actividad en grupo

En grupo, analicen y respondan los ejercicios 73 a 78. Supongan que graficamos, en los mismos ejes, un sistema de tres ecuaciones lineales con dos variables. Determinen el número máximo de puntos donde dos o más de las rectas pueden intersectarse, si:

73. las tres rectas tienen la misma pendiente, pero diferentes intersecciones con y .
74. las tres rectas tienen la misma pendiente y la misma intersección con y .
75. dos rectas tienen la misma pendiente pero diferentes intersecciones con y , y la tercera recta tiene una pendiente diferente.
76. las tres rectas tienen pendientes diferentes pero la misma intersección con y .
77. las tres rectas tienen diferentes pendientes pero dos tienen la misma intersección con y .
78. las tres rectas tienen diferentes pendientes y diferentes intersecciones con y .

Ejercicios de repaso acumulativo

[2.1] 79. Simplifique $3x - (x - 6) + 4(3 - x)$.

[2.5] 80. Resuelva la ecuación $2(x + 3) - x = 5x + 2$.

[6.1] 81. Simplifique $\frac{x^2 - 9x + 14}{2 - x}$.

[6.6] 82. Resuelva la ecuación $\frac{4}{b} + 2b = \frac{38}{3}$.

[7.2] 83. a) Determine las intersecciones con x y con y de $2x + 3y = 12$.

b) Utilice las intersecciones para graficar la ecuación.

8.2 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE SUSTITUCIÓN



1 Resolver sistemas de ecuaciones por sustitución.

Como expusimos en la sección 8.1, una solución gráfica para un sistema de ecuaciones puede ser imprecisa ya que debemos estimar las coordenadas del punto de intersección. Cuando es necesaria una solución exacta, el sistema debe resolverse de forma algebraica, ya sea por sustitución o por suma y resta de ecuaciones.

1 Resolver sistemas de ecuaciones por sustitución

Ilustramos el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones por **sustitución** en el ejemplo 1 y el procedimiento por suma y resta en la sección 8.3. Sin importar cuál de las dos técnicas algebraicas utilicemos para resolver un sistema de ecuaciones, nuestro objetivo inmediato es el mismo, esto es, *obtener una ecuación que tenga una sola incógnita*.

EJEMPLO 1 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$x + 3y = 18$$

$$2x + y = 11$$

Solución Inicie despejando una de las variables de cualquiera de las ecuaciones. Puede despejar cualquiera de las variables; sin embargo, si despejamos una variable con coeficiente numérico de 1 o -1 , podríamos evitar trabajar con fracciones. En este sistema el término x en $x + 3y = 18$ y el término y en $2x + y = 11$, tienen coeficientes numéricos de 1.

Despejemos x en $x + 3y = 18$.

$$x + 3y = 18$$

$$x = -3y + 18$$

Ahora, sustituya $-3y + 18$ por x en la *otra ecuación*, $2x + y = 11$, y despeje la otra variable, y .

$$2x + y = 11$$

$$2(-3y + 18) + y = 11$$

$$-6y + 36 + y = 11$$

$$-5y + 36 = 11$$

$$-5y = -25$$

$$y = 5$$

Sustitución, ahora ésta es una ecuación con una sola variable.

Por último, sustituya $y = 5$ en la ecuación en que está despejada x y determine el valor de x .

$$x = -3y + 18$$

$$x = -3(5) + 18$$

$$x = -15 + 18$$

$$x = 3$$

Una comprobación utilizando $x = 3$ y $y = 5$ en ambas ecuaciones mostrará que la solución es el par ordenado $(3, 5)$. 

El sistema de ecuaciones en el ejemplo 1 también podría resolverse por sustitución, despejando y en la ecuación $2x + y = 11$. Hágalo ahora. Debe obtener la misma respuesta.

Observe que la solución en el ejemplo 1 es idéntica a la solución gráfica que obtuvimos en el ejemplo 3 de la sección 8.1. Ahora resumimos el procedimiento para resolver un sistema de ecuaciones por sustitución.

Para resolver un sistema de ecuaciones por sustitución

1. Despeje una variable en cualquier ecuación. (Si es posible, despeje una variable con un coeficiente numérico de 1 o -1 para evitar trabajar con fracciones.)
2. Sustituya en la otra ecuación la expresión que encontró para la primera variable en el paso 1.
3. Resuelva la ecuación determinada en el paso 2 para encontrar el valor de la segunda variable.
4. Sustituya el valor de la segunda variable encontrado en el paso 3 en la ecuación que obtuvo en el paso 1 para determinar el valor de la primera variable.
5. Por sustitución, compruebe ambos valores en las ecuaciones originales.

EJEMPLO 2 Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$2x + y = 3$$

$$4x + 2y = 12$$

Solución Despeje y en $2x + y = 3$.

$$2x + y = 3$$

$$y = -2x + 3$$

Ahora sustituya la expresión $-2x + 3$ por y en la *otra ecuación*, $4x + 2y = 12$, y despeje x .

$$4x + 2y = 12$$

$$4x + 2(-2x + 3) = 12$$

$$4x - 4x + 6 = 12$$

$$6 = 12$$

Sustitución, ahora ésta es una ecuación con una sola variable, x .

Falso.

Como el enunciado $6 = 12$ es falso, el sistema no tiene solución. Por tanto, las rectas de las ecuaciones serán paralelas y el sistema es inconsistente ya que no tiene solución. 

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 21**

Observe que la solución en el ejemplo 2 es idéntica a la solución gráfica que obtuvimos en el ejemplo 4 de la sección 8.1. La figura 8.3 en la página 512 muestra las rectas paralelas.

EJEMPLO 3 Resuelva, por sustitución, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$x - \frac{1}{2}y = 2$$

$$y = 2x - 4$$

Solución La ecuación $y = 2x - 4$ ya tiene despejada a y . Sustituyamos $2x - 4$ por y en la otra ecuación $x - \frac{1}{2}y = 2$, y despejemos x .

$$x - \frac{1}{2}y = 2$$

$$x - \frac{1}{2}(2x - 4) = 2$$

$$\begin{aligned}x - x + 2 &= 2 \\2 &= 2 \quad \text{Verdadero.}\end{aligned}$$

Observe que la suma de términos con x es 0, y cuando se simplifican, x ya no es parte de la ecuación. Como el enunciado $2 = 2$ es verdadero, este sistema tiene un número infinito de soluciones. Por tanto, las gráficas de las ecuaciones representan la misma recta y el sistema es dependiente. 

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 13**

EJEMPLO 4

Observe que la solución en el ejemplo 3 es idéntica a la solución que obtuvimos de forma gráfica en el ejemplo 5 de la sección 8.1. La figura 8.4 en la página 513 muestra que las gráficas de ambas ecuaciones son la misma recta.

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$\begin{aligned}3x + 6y &= 9 \\2x - 3y &= 6\end{aligned}$$

Solución

Ninguna de las variables en las ecuaciones tiene coeficiente numérico de 1. Sin embargo, como los números 3, 6 y 9 son divisibles entre 3, si despejamos x en la primera ecuación, evitaremos trabajar con fracciones.

$$\begin{aligned}3x + 6y &= 9 \\3x &= -6y + 9 \\\frac{3x}{3} &= \frac{-6y + 9}{3} \\x &= -\frac{6}{3}y + \frac{9}{3} \\x &= -2y + 3\end{aligned}$$

Ahora sustituyamos $-2y + 3$ por x en la otra ecuación, $2x - 3y = 6$, y despejemos la variable restante, y .

$$\begin{aligned}2x - 3y &= 6 \\2(-2y + 3) - 3y &= 6 \\-4y + 6 - 3y &= 6 \\-7y + 6 &= 6 \\-7y &= 0 \\y &= 0\end{aligned}$$

Por último, sustituyendo $y = 0$ en la ecuación en que despejamos x , resolvamos para x .

$$\begin{aligned}x &= -2y + 3 \\x &= -2(0) + 3 = 0 + 3 = 3\end{aligned}$$

La solución es $(3, 0)$. 

SUGERENCIA

Recuerde que una solución para un sistema de ecuaciones lineales debe tener los valores para x y para y . No resuelva el sistema para una de las variables y olvide resolver para la otra. Escriba la solución como un par ordenado.

EJEMPLO 5

Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución.

$$\begin{aligned}4x + 4y &= 3 \\2x &= 2y + 5\end{aligned}$$

Solución

Elegiremos despejar x en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned}
 2x &= 2y + 5 \\
 x &= \frac{2y + 5}{2} \\
 x &= y + \frac{5}{2}
 \end{aligned}$$

Ahora sustituyamos $y + \frac{5}{2}$ por x en la otra ecuación.

$$\begin{aligned}
 4x + 4y &= 3 \\
 4\left(y + \frac{5}{2}\right) + 4y &= 3 \\
 4y + 10 + 4y &= 3 \\
 8y + 10 &= 3 \\
 8y &= -7 \\
 y &= -\frac{7}{8}
 \end{aligned}$$

Por último, determinemos el valor de x .

$$\begin{aligned}
 x &= y + \frac{5}{2} \\
 x &= -\frac{7}{8} + \frac{5}{2} = -\frac{7}{8} + \frac{20}{8} = \frac{13}{8}
 \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 19**

La solución es el par ordenado $\left(\frac{13}{8}, -\frac{7}{8}\right)$.



EJEMPLO 6

Viaje en mula En 2002 y 2003 un total de 2,462 personas hicieron un recorrido en mula al fondo del Gran Cañón. Si en el viaje de 2003 hubo 372 personas más que en 2002, determine el número de personas que hizo el recorrido en mula en 2002 y en 2003.

Solución

Entender y traducir Nos han proporcionado información suficiente para obtener dos ecuaciones para nuestro sistema de ecuaciones. Sea x = al número de personas que hicieron el recorrido en mula en 2002 y y = al número de personas que lo hicieron en 2003. Ya que el total de estos dos años fue 2,462, una ecuación es $x + y = 2462$. Como el número que hizo el recorrido en 2003 fue 372 más que el número que lo hizo en 2002, podemos sumar 372 al número que hizo el recorrido en 2002 para obtener la segunda ecuación, $y = x + 372$.

$$\text{sistema de ecuaciones } \begin{cases} x + y = 2462 \\ y = x + 372 \end{cases}$$

Calcular Como la segunda ecuación, $y = x + 372$, ya tiene y despejada, sustituiremos $x + 372$ por y en la primera ecuación.

$$\begin{aligned}
 x + y &= 2462 \\
 x + \overbrace{x + 372} &= 2462 \\
 2x + 372 &= 2462 \\
 2x &= 2090 \\
 x &= 1045
 \end{aligned}$$

Revisar y responder El número de personas que hicieron el viaje en 2002 fue 1045. Por tanto, el número de personas que hicieron el viaje en 2003 es $x + 372 = 1045 + 372 = 1417$. Observe que $1045 + 1417 = 2462$.



Conjunto de ejercicios 8.2

Ejercicios conceptuales

1. Al resolver por sustitución el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 3x + 6y &= 12 \\ 4x + 3y &= 8 \end{aligned}$$
 ¿qué variable de qué ecuación elegiría para despejar, a fin de hacer más fácil la resolución? Explique su respuesta.
2. Al resolver por sustitución el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 8 \\ 3x - 9y &= 8 \end{aligned}$$
3. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales por sustitución, ¿cómo sabe si el sistema es inconsistente?
4. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales por sustitución, ¿cómo sabe si el sistema es dependiente?

Práctica de habilidades

Determine por sustitución la solución para cada sistema de ecuaciones.

- | | | |
|---|--|---|
| 5. $\begin{aligned} x + 2y &= 6 \\ 2x - 3y &= 5 \end{aligned}$ | 6. $\begin{aligned} y &= x + 3 \\ y &= -x - 5 \end{aligned}$ | 7. $\begin{aligned} x + y &= -2 \\ x - y &= 0 \end{aligned}$ |
| 8. $\begin{aligned} x + 2y &= 6 \\ 4y &= 12 - 2x \end{aligned}$ | 9. $\begin{aligned} 3x + y &= 3 \\ 3x + y + 5 &= 0 \end{aligned}$ | 10. $\begin{aligned} y &= 2x + 4 \\ y &= -2 \end{aligned}$ |
| 11. $\begin{aligned} x &= 3 \\ x + y + 5 &= 0 \end{aligned}$ | 12. $\begin{aligned} y &= 2x - 13 \\ -4x - 7 &= 9y \end{aligned}$ | 13. $\begin{aligned} x - \frac{1}{2}y &= 6 \\ y &= 2x - 12 \end{aligned}$ |
| 14. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 6x - y &= 1 \end{aligned}$ | 15. $\begin{aligned} 2x + y &= 11 \\ y &= 4x - 7 \end{aligned}$ | 16. $\begin{aligned} y &= -2x + 5 \\ x + 3y &= 0 \end{aligned}$ |
| 17. $\begin{aligned} y &= \frac{1}{3}x - 2 \\ x - 3y &= 6 \end{aligned}$ | 18. $\begin{aligned} x &= y + 1 \\ 4x + 2y &= -14 \end{aligned}$ | 19. $\begin{aligned} 2x + 3y &= 7 \\ 6x - 2y &= 10 \end{aligned}$ |
| 20. $\begin{aligned} 3x - 3y &= 4 \\ 2x + 3y &= 5 \end{aligned}$ | 21. $\begin{aligned} 3x - y &= 14 \\ 6x - 2y &= 10 \end{aligned}$ | 22. $\begin{aligned} 5x - 2y &= -7 \\ 5 &= y - 3x \end{aligned}$ |
| 23. $\begin{aligned} 4x - 5y &= -4 \\ 3x &= 2y - 3 \end{aligned}$ | 24. $\begin{aligned} 3x + 4y &= 10 \\ 4x + 5y &= 14 \end{aligned}$ | 25. $\begin{aligned} 4x + 5y &= -6 \\ x - \frac{5}{3}y &= -2 \end{aligned}$ |
| 26. $\begin{aligned} \frac{1}{2}x + y &= 4 \\ 3x + \frac{1}{4}y &= 6 \end{aligned}$ | | |

Solución de problemas

27. **Enteros positivos** La suma de dos enteros positivos es 79. Determine los enteros si un número es 7 unidades mayor que el otro.
28. **Enteros positivos** La diferencia de dos enteros positivos es 44. Determine los enteros si el número mayor es el doble que el número menor.
29. **Rectángulo** El perímetro de un rectángulo es 40 pies. Determine las dimensiones del rectángulo si el largo es 4 pies mayor que el ancho.
30. **Rectángulo** El perímetro de un rectángulo es 50 pies. Determine las dimensiones del rectángulo si el largo es cuatro veces su ancho.

- 31. Caballo de madera** Para comprar una estatua de un caballo de madera, Billy y Jean reunieron su dinero. Juntos tienen \$726. Si Jean tiene \$134 más que Bill, ¿cuánto dinero tenía cada uno?
- 32. Asistencia a un rodeo** En un rodeo el total de asistentes que pagó su boleto fue 2,500. Si el número de personas que recibieron un descuento en el pago de la entrada fue 622 menos que el número que no recibió descuento, determine el número de asistentes que pagaron el costo completo de la entrada.
- 33. Resolución legal** Después de una resolución legal, la parte de la indemnización del cliente fue el triple de la parte del abogado. Si la indemnización total fue de \$20,000, ¿cuánto obtuvo el cliente?
- 34. Mezcla de nueces** Un tendero elaboró un barril conteniendo una mezcla de nueces, que consiste en anacardos y almendras. El barril contenía 62 libras de nueces. Hay el doble de libras de anacardos que de almendras. Determine el número total de libras de anacardos y de almendras en el barril.
- 35. Refinanciamiento** Dona Boccio está considerando refinanciar el pago de su casa. El costo de refinanciamiento es un pago único de \$1,280. Con la reducción de la tasa de la hipoteca, su pago del interés mensual y del capital sería \$794. El costo total, c , durante n meses podría representarse por $c = 1280 + 794n$. Con la tasa actual los pagos mensuales de su hipoteca son \$874 y el costo total durante n meses puede representarse por $c = 874n$.
- Determine el número de meses para los que ambos planes tendrían el mismo costo total.
 - Si Dona planea permanecer en su casa durante 12 años, ¿debe refinanciar?
- 36. Temperaturas** En Seattle la temperatura es 82°F , pero está descendiendo 2 grados por hora. La temperatura, T , en el tiempo t , en horas, está representada por $T = 82 - 2t$. En Spokane la temperatura es 64°F , pero sube 2.5 grados por hora. La temperatura, T , puede representarse por $T = 64 + 2.5t$.
- Si la temperatura continúa descendiendo y subiendo a la misma tasa en estas ciudades, ¿cuánto tiempo pasará antes de que ambas ciudades tengan la misma temperatura?
 - Cuando ambas ciudades tengan la misma temperatura, ¿cuál será dicha temperatura?



Seattle, Washington

- 37. Recorrido en automóvil** El automóvil de Jean Woody tiene un registro de 80 millas en una autopista, 15 millas atrás está el automóvil de Roberta Kieronski. El automóvil de Jean viaja a 60 millas por hora. El registro de millas que tendrá en t horas puede determinarse por medio de la ecuación $m = 80 + 60t$. El automóvil de Roberta viaja a 72 millas por hora. El registro de millas que tendrá al cabo de t horas puede encontrarse por medio de la ecuación $m = 65 + 72t$.
- Determine el tiempo que tardará Roberta en alcanzar al automóvil de Jean.
 - Cuando se alcancen, ¿cuál será el registro en el odómetro?
- 38. Almacén de computadoras** El salario actual de Bill Jordan consiste en un pago fijo semanal de \$300 más un bono de \$20 por cada sistema de cómputo que venda. Su salario semanal puede representarse por $s = 300 + 20n$, donde n es el número de sistemas de cómputo que vende. Él está considerando otro puesto donde el salario semanal sería de \$400 más un bono de \$10 por cada sistema de cómputo que venda. El salario semanal del otro puesto puede representarse por $s = 400 + 10n$. ¿Cuántos sistemas de cómputo necesitaría vender Bill en una semana para que su salario fuese igual en ambas empresas?

Problemas de reto

Responda los incisos **a)** a **d)** como prefiera.

- 39. Transferencia de calor** En un laboratorio, durante un experimento sobre transferencia de calor, una gran bola metálica se calentó a una temperatura de 180°F . Luego, esta bola metálica se colocó en un galón de aceite a una temperatura de 20°F . Suponga que cuando la bola se colocó en el aceite pierde temperatura a la tasa de 10° por minuto, mientras que la temperatura del aceite se eleva a una tasa de 6°F por minuto.
- Plantee una ecuación que pueda utilizarse para determinar la temperatura de la bola t minutos después que se coloca en el aceite.
 - Plantee una ecuación que pueda utilizarse para determinar la temperatura del aceite t minutos después que la bola es colocada en él.
 - Determine cuánto tardarán la bola y el aceite en alcanzar la misma temperatura.
 - Cuando estén a la misma temperatura el aceite y la bola, ¿cuál será la temperatura?



Actividad en grupo

En grupo, analicen y resuelvan el ejercicio 40.

40. En álgebra intermedia podrán resolver sistemas que tienen tres ecuaciones con tres variables. En grupo, resuelvan el sistema de ecuaciones de la derecha; sus respuestas serán en forma de una **terna ordenada** (x, y, z) .

$$\begin{aligned}x &= 4 \\2x - y &= 6 \\-x + y + z &= -3\end{aligned}$$

Ejercicios de repaso acumulativo

- [3.1] 41. **Sauce** El diámetro de un sauce crece casi 3.5 pulgadas por año. ¿Cuál será la edad aproximada de un sauce cuyo diámetro es de 25 pulgadas?

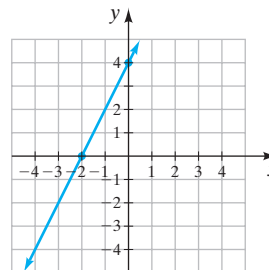


- [4.5] 42. Multiplique $(6x + 7)(3x - 2)$.

- [7.2] 43. Por medio de las intersecciones con los ejes x y y , grafique $4x - 8y = 16$.

- [7.4] 44. Determine la pendiente y la intersección con y de la gráfica de la ecuación $3x - 5y = 8$.

45. Determine la ecuación de la siguiente recta.



8.3 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES POR EL MÉTODO DE SUMA Y RESTA (REDUCCIÓN O ELIMINACIÓN)



- 1 Solución de sistemas de ecuaciones por suma y resta (reducción o eliminación).

1 Solución de sistemas de ecuaciones por suma y resta (reducción o eliminación)

Un tercer método, y con frecuencia el más sencillo, para resolver un sistema de ecuaciones es el **método de suma o resta (reducción o eliminación)**. *El objetivo de este proceso es obtener dos ecuaciones cuya suma sea una ecuación con una sola variable.* Siempre tenga en mente que nuestro objetivo inmediato es obtener una ecuación con una sola incógnita.

Utilizamos el hecho de que si $a = b$ y $c = d$, entonces $a + c = b + d$. Suponga que tenemos las dos ecuaciones siguientes.

$$\begin{aligned}x - 2y &= 6 \\3x + 2y &= 2\end{aligned}$$

Si sumamos el lado izquierdo de las dos ecuaciones obtenemos $4x$, ya que $-2y + 2y = 0$. Si sumamos el lado derecho de las ecuaciones obtenemos $6 + 2 = 8$. Por tanto, la suma de las ecuaciones es $4x = 8$, que es una ecuación con una sola variable.

$$\begin{array}{r} x - 2y = 6 \\ 3x + 2y = 2 \\ \hline 4x = 8 \end{array}$$

De la ecuación $4x = 8$, determinamos que $x = 2$.

$$\begin{array}{l} 4x = 8 \\ x = 2. \end{array}$$

Ahora podemos sustituir 2 por x en cualquiera de las ecuaciones originales para determinar y . Sustituiremos 2 por x en $x - 2y = 6$.

$$\begin{array}{l} x - 2y = 6 \\ 2 - 2y = 6 \\ -2y = 4 \\ y = -2 \end{array}$$

La solución para el sistema es $(2, -2)$. Este par ordenado satisfará ambas ecuaciones. Ahora compruebe esta solución. Resolvamos algunos ejemplos.

EJEMPLO 1 Resuelva, por medio del método de suma, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{l} x + y = 6 \\ 2x - y = 3 \end{array}$$

Solución Observe que una ecuación tiene $+y$ y la otra $-y$. Sumando las ecuaciones, podemos eliminar la variable y y obtener una ecuación con sólo una variable, x . Al sumar, $+y$ y $-y$ la suma da 0, y se elimina la variable y .

$$\begin{array}{r} x + y = 6 \\ 2x - y = 3 \\ \hline 3x = 9 \end{array}$$

Ahora resolvemos x para la variable que queda.

$$\begin{array}{l} \frac{3x}{3} = \frac{9}{3} \\ x = 3 \end{array}$$

Por último, resolvemos para y , sustituyendo $x = 3$ en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{array}{l} x + y = 6 \\ 3 + y = 6 \\ y = 3 \end{array}$$

La solución es $(3, 3)$.

Comprobamos la respuesta en *ambas* ecuaciones.

Comprobación	$x + y = 6$	$2x - y = 3$
	$3 + 3 \stackrel{?}{=} 6$	$2(3) - 3 \stackrel{?}{=} 3$
	$6 = 6$ Verdadero.	$6 - 3 \stackrel{?}{=} 3$
		$3 = 3$ Verdadero.



A continuación resumimos el procedimiento.

Para resolver por el método de suma o resta (reducción o eliminación) un sistema de ecuaciones

1. Si es necesario, describa cada ecuación de modo que los términos que tengan variables aparezcan en el lado izquierdo del signo de igual (primer miembro de la ecuación) y las constantes, lado derecho del signo de igual (segundo miembro de la ecuación).
2. Si es necesario, multiplique una o ambas ecuaciones por una constante(s) de modo que cuando se sumen obtenga sólo una variable.
3. Sume las ecuaciones. Esto resultará en una sola ecuación con sólo una variable.
4. Resuelva para la variable en la ecuación del paso 3.
5. a) Sustituya el valor encontrado en el paso 4 en cualquiera de las ecuaciones originales. Resuelva esa ecuación para determinar el valor de la variable restante.
O bien
b) Repita los pasos 2 a 4 para eliminar la otra variable.
6. Compruebe, en todas las ecuaciones originales, los valores obtenidos.

En el paso 5 damos dos métodos para determinar la segunda variable, después de que hemos encontrado la primera. Por lo general utilizamos el método a) si el valor obtenido para la primera variable es un entero. Con frecuencia, se prefiere el método b) si el valor obtenido para la primera variable es una fracción.

En el paso 2 podría ser necesario multiplicar una o ambas ecuaciones por una constante. Por ejemplo, suponga que tenemos el sistema de ecuaciones, marcado (ec. 1) y (ec. 2) como mostramos a continuación.

$$3x + 2y = 6 \quad (\text{ec. 1})$$

$$x - y = 8 \quad (\text{ec. 2})$$

Si queremos multiplicar la ecuación 2 por -3 , lo indicaremos como sigue.

$$\begin{array}{rcl} 3x + 2y = 6 & & 3x + 2y = 6 \\ -3(x - y) = -3(8) & (\text{ec. 2}) \text{ Multiplicada por } -3 & \text{o bien} \quad -3x + 3y = 24 \end{array}$$

Después de realizar la multiplicación por lo común trabajaremos con el sistema de ecuaciones revisado, como el sistema dado a la derecha.

EJEMPLO 2 Resuelva por el método de suma y resta el sistema de ecuaciones siguiente.

$$x + 3y = 13 \quad (\text{ec. 1})$$

$$x + 4y = 18 \quad (\text{ec. 2})$$

Solución

El objetivo del proceso de suma es obtener dos ecuaciones cuya suma sea una ecuación con una sola variable. No eliminamos ninguna de las variables si sumamos estas dos ecuaciones. Sin embargo, si multiplicamos cualquiera de ellas por -1 y luego sumamos, los términos con x sumarán 0, y habremos alcanzado nuestro objetivo. Multiplicaremos (ec. 1) por -1 .

$$\begin{array}{rcl} -1(x + 3y) = -1 \cdot 13 & (\text{ec. 1}) \text{ Multiplicada por } -1 & \text{o bien} \quad -x - 3y = -13 \\ x + 4y = 18 & (\text{ec. 2}) & x + 4y = 18 \end{array}$$

Recuerde que ambos lados de la ecuación deben multiplicarse por -1 . Este proceso cambia el signo de cada término en la ecuación que es multiplicada sin cambiar la solución para el sistema de ecuaciones. Ahora sumamos las dos ecuaciones de la derecha.

$$\begin{array}{r} -x - 3y = -13 \\ x + 4y = 18 \\ \hline y = 5 \end{array}$$

Resolvemos para x en cualquiera de las ecuaciones originales.

$$\begin{array}{r} x + 3y = 13 \\ x + 3(5) = 13 \\ x + 15 = 13 \\ x = -2. \end{array}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 13

Una comprobación mostrará que la solución es $(-2, 5)$.



EJEMPLO 3

Resuelva, mediante el método de suma y resta, el siguientes sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{r} 2x + y = 11 \quad (\text{ec. 1}) \\ x + 3y = 18 \quad (\text{ec. 2}) \end{array}$$

Solución

Para eliminar la variable x , multiplique (ec. 2) por -2 y sume las dos ecuaciones

$$\begin{array}{r} 2x + y = 11 \quad (\text{ec. 1}) \\ -2(x + 3y) = -2 \cdot 18 \quad (\text{ec. 2}) \text{ Multiplicada por } -2 \text{ o bien } -2x - 6y = -36 \end{array}$$

Ahora sume:

$$\begin{array}{r} 2x + y = 11 \\ -2x - 6y = -36 \\ \hline -5y = -25 \\ y = 5 \end{array}$$

Resuelva para x .

$$\begin{array}{r} 2x + y = 11 \\ 2x + 5 = 11 \\ 2x = 6 \\ x = 3 \end{array}$$

La solución es $(3, 5)$.



Observe que la solución en el ejemplo 3 es la misma que las soluciones obtenidas de manera gráfica en el ejemplo 3 de la sección 8.1 y por sustitución en el ejemplo 1 de la sección 8.2.

En el ejemplo 3, podríamos haber multiplicado la (ec. 1) por -3 para eliminar la variable y . En este momento, vuelva a resolver el ejemplo 3 eliminando la variable y para ver que obtiene la misma respuesta.

EJEMPLO 4

Resuelva, por medio del método de suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{r} 4x = -2y - 18 \\ -5y = 2x + 10 \end{array}$$

Solución El paso 1 del procedimiento indica que debemos reescribir cada ecuación de modo que los términos con variables aparezcan en el lado izquierdo del signo de igual y las constantes en el lado derecho. Sumando $2y$ en ambos lados de la primera ecuación y restando $2x$ en ambos lados de la segunda ecuación, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$4x + 2y = -18 \quad (\text{ec. 1})$$

$$-2x - 5y = 10 \quad (\text{ec. 2})$$

Ahora continuamos para resolver el sistema. Para eliminar la variable, x , podemos multiplicar la (ec. 2) por 2 y luego sumar.

$$4x + 2y = -18 \quad (ec.1)$$

$$4x + 2y = -18$$

$$2(-2x - 5y) = 2 \cdot 10 \quad (\text{ec.2}) \text{ Multiplicada por 2} \quad \text{o bien} \quad -4x - 10y = 20$$

$$\begin{array}{r} 4x + 2y = -18 \\ -4x - 10y = 20 \\ \hline -8y = 2 \\ y = -\frac{1}{4} \end{array}$$

Resuelva para x .

$$4x + 2y = -18$$

$$4x + 2\left(-\frac{1}{4}\right) = -18$$

$$4x - \frac{1}{2} = -18$$

$$2\left(4x - \frac{1}{2}\right) = 2(-18)$$

Multiplique ambos lados por 2 para eliminar las fracciones.

$$8x - 1 = -36$$

$$8x = -35$$

$$x = -\frac{35}{8}$$

La solución es $\left(-\frac{35}{8}, -\frac{1}{4}\right)$.

Compruebe la solución $\left(-\frac{35}{8}, -\frac{1}{4}\right)$ en ambas ecuaciones.

Comprobación $4x + 2y = -18$ $-2x - 5y = 10$

$$4\left(-\frac{35}{8}\right) + 2\left(-\frac{1}{4}\right) \stackrel{?}{=} -18 \qquad -2\left(-\frac{35}{8}\right) - 5\left(-\frac{1}{4}\right) \stackrel{?}{=} 10$$

$$-\frac{35}{2} - \frac{1}{2} \stackrel{?}{=} -18 \qquad \frac{35}{4} + \frac{5}{4} \stackrel{?}{=} 10$$

$$-\frac{36}{2} \stackrel{?}{=} -18 \qquad \frac{40}{4} \stackrel{?}{=} 10$$

$$-18 = -18 \text{ Verdadero.} \qquad 10 = 10 \text{ Verdadero.} \star$$

Observe que la solución del ejemplo 4 tiene fracciones. No debe esperar obtener siempre enteros en las respuestas.

EJEMPLO 5 Resuelva, por medio del método de suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + 3y = 6 \quad (\text{ec. 1})$$

$$5x - 4y = -8 \quad (\text{ec. 2})$$

Solución La variable x puede eliminarse multiplicando la (ec. 1) por -5 y la (ec. 2) por 2 , y luego sumando las ecuaciones.

$$-5(2x + 3y) = -5 \cdot 6 \quad (\text{ec. 1 multiplicada por } -5) \text{ o bien } -10x - 15y = -30$$

$$2(5x - 4y) = 2 \cdot (-8) \quad (\text{ec. 2 multiplicada por } 2) \text{ o bien } 10x - 8y = -16$$

$$-10x - 15y = -30$$

$$10x - 8y = -16$$

$$\hline -23y = -46$$

$$y = 2$$

Resuelva para x .

$$2x + 3y = 6$$

$$2x + 3(2) = 6$$

$$2x + 6 = 6$$

$$2x = 0$$

$$x = 0$$

La solución es $(0, 2)$. 

En el ejemplo 5, el mismo valor podría haberse obtenido para y multiplicando la (ec. 1) por 5 y la (ec. 2) por -2 , y luego sumando. Ahora hágalo y vea el resultado. También podríamos haber iniciado eliminando la variable y multiplicando la (ec. 1) por 4 y la (ec. 2) por 3 .

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 19

EJEMPLO 6 Resuelva, por medio del método de suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + y = 3 \quad (\text{ec. 1})$$

$$4x + 2y = 12 \quad (\text{ec. 2})$$

Solución Podemos eliminar la variable y multiplicando la (ec. 1) por -2 y luego sumando las dos ecuaciones.

$$-2(2x + y) = -2 \cdot 3 \quad (\text{ec. 1 multiplicada por } -2) \text{ o bien } -4x - 2y = -6$$

$$4x + 2y = 12 \quad (\text{ec. 2}) \qquad 4x + 2y = 12$$

$$-4x - 2y = -6$$

$$4x + 2y = 12$$

$$\hline 0 = 6 \quad \text{Falso.}$$

¡Que no cunda el pánico cuando ambas variables desaparecen y se encuentra con una expresión como $0 = 6$! No todos los sistemas de ecuaciones tienen solución. **Como $0 = 6$ es un enunciado falso, este sistema no tiene solución.** El sistema es inconsistente. Las gráficas de las ecuaciones serán rectas paralelas. 

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 25

Observe que la solución en el ejemplo 6 es idéntica a las soluciones obtenidas por graficación en el ejemplo 4 de la sección 8.1 y por sustitución en el ejemplo 2 de la sección 8.2.

EJEMPLO 7 Resuelva, por medio del método de suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}x - \frac{1}{2}y &= 2 \\ y &= 2x - 4\end{aligned}$$

Solución Primero alinee los términos con x y y al lado izquierdo del signo de igual (primer miembro), mediante la resta de $2x$ en ambos lados de la segunda ecuación.

$$x - \frac{1}{2}y = 2 \quad (\text{ec. 1})$$

$$-2x + y = -4 \quad (\text{ec. 2})$$

Ahora proceda como en los ejemplos anteriores. Comience multiplicando la (ec. 1) por 2 para eliminar las fracciones de la ecuación.

$$2\left(x - \frac{1}{2}y\right) = 2 \cdot 2 \quad (\text{ec. 1}) \text{ multiplicada por } 2 \text{ o bien } 2x - y = 4$$

$$-2x + y = -4 \quad (\text{ec. 2}) \qquad -2x + y = -4$$

$$\begin{array}{rcl}2x - y & = & 4 \\ -2x + y & = & -4 \\ \hline 0 & = & 0 \quad \text{Verdadero.}\end{array}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 21**

Nuevamente, ambas variables desaparecieron. Aquí nos queda $0 = 0$. **Como $0 = 0$ es un enunciado verdadero, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.** Al graficar, ambas ecuaciones serán la misma recta. 

La solución en el ejemplo 7 es la misma que las soluciones obtenidas por graficación en el ejemplo 5 de la sección 8.1 y por sustitución en el ejemplo 3 de la sección 8.2.

EJEMPLO 8 Resuelva, por medio del método de suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + 3y = 7 \quad (\text{ec. 1})$$

$$5x - 7y = -3 \quad (\text{ec. 2})$$

Solución Podemos eliminar la variable x multiplicando la (ec. 1) por -5 y la (ec. 2) por 2.

$$-5(2x + 3y) = -5 \cdot 7 \quad (\text{ec. 1}) \text{ multiplicada por } -5 \text{ o bien } -10x - 15y = -35$$

$$2(5x - 7y) = 2(-3) \quad (\text{ec. 2}) \text{ multiplicada por } 2 \text{ o bien } 10x - 14y = -6$$

$$\begin{array}{rcl}-10x - 15y & = & -35 \\ 10x - 14y & = & -6 \\ \hline -29y & = & -41 \\ y & = & \frac{41}{29}\end{array}$$

Ahora podemos determinar x sustituyendo $y = \frac{41}{29}$ en una de las ecuaciones originales y despejando x . Si usted intenta esto, verá que aunque puede hacerlo, los cálculos son complicados. Un método más sencillo para encontrar el valor de x es regresar a las ecuaciones originales y eliminar la variable y . Podemos hacer esto multiplicando la (ec. 1) por 7 y la (ec. 2) por 3.

$$\begin{array}{rcl}
 7(2x + 3y) = 7 \cdot 7 & (\text{ec. 1 multiplicada por } 7) & \text{o bien} \quad 14x + 21y = 49 \\
 3(5x - 7y) = 3(-3) & (\text{ec. 2 multiplicada por } 3) & \text{o bien} \quad 15x - 21y = -9 \\
 \hline
 14x + 21y = 49 \\
 15x - 21y = -9 \\
 \hline
 29x = 40 \\
 x = \frac{40}{29}
 \end{array}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 35

La solución es $\left(\frac{40}{29}, \frac{41}{29}\right)$.



SUGERENCIA

Hemos ilustrado tres métodos para resolver un sistema de ecuaciones lineales: graficación, sustitución y suma o resta. Cuando tenga un sistema de ecuaciones, ¿cuál método debe utilizar para resolverlo? No debemos utilizar la graficación cuando necesite una solución exacta. De los dos métodos algebraicos, si no hay coeficientes numéricos iguales a 1 en el sistema, el método de suma y resta podría ser el más sencillo de utilizar. Si una o más variables tienen un coeficiente igual a 1, podría utilizar la sustitución o la suma y resta.

Conjunto de ejercicios 8.3

Ejercicios conceptuales

- Al resolver, por suma y resta, el siguiente sistema de ecuaciones, ¿cuál será su primer paso para resolver el sistema? Explique su respuesta. No resuelva el sistema.

$$\begin{array}{r}
 -x + 3y = 4 \\
 2x + 5y = 2
 \end{array}$$
- Al resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método de suma y resta, ¿cuál será su primer paso para resolver el sistema? Explique su respuesta. No resuelva el sistema.

$$\begin{array}{r}
 2x + 4y = -8 \\
 3x - 2y = 10
 \end{array}$$
- Al resolver un sistema de ecuaciones lineales por suma y resta, ¿cómo sabe si el sistema es inconsistente?
- Al resolver un sistema de ecuaciones lineales por suma y resta, ¿cómo sabe si el sistema es dependiente?

Práctica de habilidades

Resuelva cada sistema de ecuaciones por medio del método de suma y resta.

- $x + y = 6$
 $x - y = 4$
- $x - y = 6$
 $x + y = 8$
- $x + y = 5$
 $-x + y = 1$
- $x - y = 2$
 $x + y = -2$
- $x + 2y = 15$
 $x - 2y = -7$
- $3x + y = 10$
 $4x - y = 4$
- $4x + y = 6$
 $-8x - 2y = 20$
- $6x + 3y = 30$
 $4x + 3y = 18$
- $-5x + y = 14$
 $-3x + y = -2$
- $x - y = 2$
 $3x - 3y = 0$
- $2x + y = -6$
 $2x - 2y = 3$
- $-4x + 3y = 0$
 $5x - 6y = 9$
- $2y = 6x + 16$
 $y = -3x - 4$
- $2x - 3y = 4$
 $2x + y = -4$
- $5x + 3y = 12$
 $2x - 4y = 10$
- $6x - 4y = 9$
 $2x - 8y = 3$
- $-2y = -4x + 8$
 $y = 2x - 4$
- $4x - 2y = -4$
 $-3x - 4y = -30$

$$\begin{aligned} 23. \quad 5x - 4y &= -3 \\ 5y &= 2x + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 26. \quad 2x - 3y &= 11 \\ -3x &= -5y - 17 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 29. \quad -5x + 4y &= -20 \\ 3x - 2y &= 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 32. \quad 4x - 3y &= -4 \\ 3x - 5y &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 35. \quad x - \frac{1}{2}y &= 4 \\ 3x + y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 38. \quad -5x + 6y &= -12 \\ \frac{5}{3}x - 4 &= 2y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \quad 5x + 4y &= 10 \\ -3x - 5y &= 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 27. \quad 5x - 5y &= 0 \\ 3x + 2y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 30. \quad 5x &= 2y - 4 \\ 3x - 5y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 33. \quad 4x + 5y &= 0 \\ 3x &= 6y + 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 36. \quad 2x - \frac{1}{3}y &= 6 \\ 5x - y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 25. \quad 5x - 4y &= 1 \\ -10x + 8y &= -4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 28. \quad 4x - 2y &= 8 \\ 4y &= 8x - 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 31. \quad 6x &= 4y + 12 \\ -3y &= -5x + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 34. \quad 4x - 3y &= 8 \\ -3x + 4y &= 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 37. \quad 3x - y &= 4 \\ 2x - \frac{2}{3}y &= 6 \end{aligned}$$

Resolución de problemas

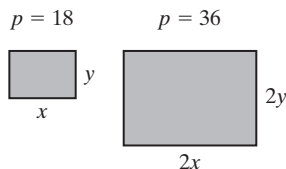
39. **Suma de números** La suma de dos números es 16. Cuando el segundo número se resta del primero, la diferencia es 8. Determine los dos números.

40. **Suma de números** La suma de dos números es 42. Cuando el primer número se resta del segundo, la diferencia es 6. Determine los dos números.

41. **Suma de números** La suma de un número y el doble de un segundo número es 14. Cuando el segundo número se resta del primero la diferencia es 2. Determine los dos números.

42. **Suma de números** La suma de dos números es 9. El doble del primer número restado del triple del segundo número es 7. Determine los dos números.

43. **Rectángulos** Cuando el largo de un rectángulo es x pulgadas y el ancho es y pulgadas, el perímetro es 18 pulgadas. Si tanto el largo como el ancho se duplican, el perímetro se convierte en 36 pulgadas. Determine el largo y el ancho del rectángulo. El largo es el doble del ancho.



44. **Perímetro de un rectángulo** Cuando el largo de un rectángulo es x pulgadas y el ancho es y pulgadas, el perímetro es de 28 pulgadas. Si el largo se duplica y el ancho se triplica, el nuevo perímetro es 66 pulgadas. Determine el largo y ancho del rectángulo original.

45. **Fotografía** Una fotografía tiene un perímetro de 36 pulgadas. La diferencia entre el largo y el ancho de la fotografía

es de 2 pulgadas. Determine el largo y el ancho de la fotografía.

46. **Jardín rectangular** John tiene un gran jardín rectangular con un perímetro de 122 pies. La diferencia entre el largo y el ancho del jardín es 11 pies. Determine las dimensiones del jardín.

47. Construya un sistema de dos ecuaciones que no tenga solución. Explique cómo sabe que el sistema no tiene solución.

48. Construya un sistema de dos ecuaciones que tenga un número infinito de soluciones. Explique cómo sabe que el sistema tiene un número infinito de soluciones.

49. a) Resuelva el sistema de ecuaciones

$$4x + 2y = 1000$$

$$2x + 4y = 800$$

b) Si dividimos entre 2 todos los términos de la primera ecuación, obtenemos el siguiente sistema:

$$2x + y = 500$$

$$2x + 4y = 800.$$

¿Cómo será la solución para este sistema en comparación con la solución del inciso a)? Explique y luego compruebe su explicación resolviendo este sistema.

50. Suponga que divide entre 2 todos los términos en las dos ecuaciones dadas en el ejercicio 49 a), y luego resuelve el sistema. ¿Cómo será la solución para este sistema en comparación con la solución del inciso a)? Explique y luego compruebe su explicación resolviendo cada sistema.

Problemas de reto

En los ejercicios 51 y 52, resuelva cada sistema de ecuaciones por suma y resta. (Sugerencia: primero elimine todas las fracciones, multiplicando ambos lados de la ecuación por el mcd.)

$$51. \quad \frac{x+2}{2} - \frac{y+4}{3} = 4$$

$$\frac{x+y}{2} = \frac{1}{2} + \frac{x-y}{3}$$

$$52. \quad \frac{5}{2}x + 3y = \frac{9}{2} + y$$

$$\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}y = 6x + 12$$

En álgebra intermedia podrá resolver sistemas de tres ecuaciones con tres variables. Resuelva el siguiente sistema.

$$53. \quad \begin{aligned} x + 2y - z &= 2 \\ 2x - y + z &= 3 \\ 2x + y + z &= 7 \end{aligned}$$

Sugerencia: trabaje un par de ecuaciones para obtener una ecuación con dos incógnitas. Luego trabaje con un par di-

ferente de las ecuaciones originales para obtener otra ecuación con las mismas dos incógnitas. Luego resuelva el sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas. Escriba su respuesta como una terna ordenada de la forma (x, y, z) .



Actividad en grupo

Resuelvan individualmente los incisos a) y b) del ejercicio 54. Luego, en grupo, analicen y resuelvan los incisos c) y d).

54. ¿Qué tan difícil es construir un sistema de ecuaciones lineales que tenga una solución específica? Realmente no es tan difícil hacerlo. Considere:

$$\begin{aligned} 2(3) + 4(5) &= 26 \\ 4(3) - 7(5) &= -23 \end{aligned}$$

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2x + 4y &= 26 \\ 4x - 7y &= -23 \end{aligned}$$

tiene solución $(3, 5)$.

- a) Con la información dada, determine otro sistema de ecuaciones que tenga $(3, 5)$ como una solución.
- b) Determine un sistema de ecuaciones lineales que tenga $(2, 3)$ como una solución.
- c) Compare su respuesta con la de los otros miembros de su grupo.
- d) En grupo, determinen el número de sistemas de ecuaciones que tienen $(2, 3)$ como una solución.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 55. Evalúe 5^3 .

[2.5] 56. Resuelva la ecuación $2(2x - 3) = 2x + 8$.

[4.4] 57. Simplifique $(4x^2y - 3xy + y) - (2x^2y + 6xy - 3y)$.

[4.5] 58. Multiplique $(8a^4b^2c)(4a^2b^7c^4)$.

[5.2] 59. Factorice por agrupamiento $xy + xc - ay - ac$.

[7.6] 60. Si $f(x) = 2x^2 - 4$, determine $f(-3)$.

8.4 SISTEMAS DE ECUACIONES: APLICACIÓN Y SOLUCIÓN DE PROBLEMAS



- 1 Utilizar sistemas de ecuaciones para resolver problemas de aplicación.

1 Utilizar sistemas de ecuaciones para resolver problemas de aplicación

El método elegido para resolver un sistema de ecuaciones depende de si uno quiere tener “el panorama completo” o si está interesado en determinar la solución exacta. Si está interesado en ver la tendencia cuando la variable cambia, tal vez de-

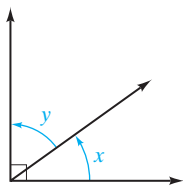


FIGURA 8.12

cida graficar las ecuaciones. Si sólo quiere la solución —es decir, el par ordenado común a ambas ecuaciones— podría utilizar uno de los dos métodos algebraicos para determinar la solución común.

Muchos de los problemas de aplicación resueltos en los capítulos anteriores que sólo utilizan una variable, también pueden resolverse utilizando dos variables. En el ejemplo 1 utilizamos **ángulos complementarios**, que son dos ángulos cuya suma mide 90° . La figura 8.12 muestra los ángulos complementarios x y y .

EJEMPLO 1 Construcción de un patio Phil Mahler está construyendo un patio exterior rectangular de cemento (figura 8.13). Cuando él mide los dos ángulos formados por una diagonal encuentra que el ángulo x es 16° mayor que el ángulo y . Determine los dos ángulos.

Solución

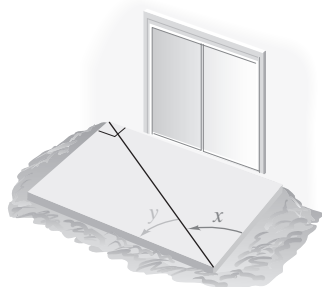


FIGURA 8.13

Entender y traducir Un rectángulo tiene 4 ángulos rectos (o de 90°). Por tanto, los ángulos x y y son complementarios y la suma de ellos es 90° . Así que una ecuación en el sistema de ecuaciones es $x + y = 90$. Como el ángulo x es 16° mayor que el ángulo y , la segunda ecuación es $x = y + 16$.

$$\text{Sistema de ecuaciones} \quad \begin{cases} x + y = 90 \\ x = y + 16 \end{cases}$$

Calcular Reste y de cada lado de la segunda ecuación. Luego utilice el método de suma para resolver.

$$\begin{array}{r} x + y = 90 \\ x - y = 16 \\ \hline 2x = 106 \\ x = 53 \end{array}$$

Ahora sustituya 53 por x en la primera ecuación y resuelva para y .

$$\begin{array}{r} x + y = 90 \\ 53 + y = 90 \\ y = 37 \end{array}$$

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 3

Revisar y responder El ángulo x es 53° y el ángulo y es 37° . Observe que su suma es 90° y el ángulo x es 16° mayor que el ángulo y .

El ejemplo 1 también podría haberse resuelto por medio del método de sustitución. Ahora resuélvalo por este método.

EJEMPLO 2 Cercar un área de comida Marcella Laddon abrió un nuevo restaurante que tiene un área rectangular, al aire libre, para comida. Ella quiere rodear el área con una cerca pero olvidó las dimensiones; sin embargo, recuerda que el perímetro del área rectangular es 152 pies y el largo es 3 veces el ancho. Determine las dimensiones del área rectangular.

Solución

Entender y traducir La fórmula para el perímetro de un rectángulo es $P = 2l + 2a$. Utilizaremos esta fórmula para determinar una ecuación en el sistema. La otra ecuación proviene del hecho de que el largo es tres veces el ancho. Sea a = ancho del área rectangular y l = largo del área rectangular. Como el perímetro es 152 pies, una ecuación es $152 = 2l + 2a$. Como el largo es 3 veces el ancho, la otra ecuación es $l = 3a$.

$$\text{Sistema de ecuaciones} \quad \begin{cases} 152 = 2l + 2a \\ l = 3a \end{cases}$$

Calcular Resolveremos este sistema por sustitución. Ya que $l = 3a$, sustituimos $3a$ por l en la ecuación $152 = 2l + 2a$ para obtener

$$152 = 2l + 2a$$

$$152 = 2(3a) + 2a$$

$$152 = 6a + 2a$$

$$152 = 8a$$

$$19 = a$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 7**

Revisar y responder El ancho es 19 pies. Como el largo es 3 veces el ancho, el largo es $3(19)$ o 57 pies. Observe que el perímetro es $2(19) + 2(57) = 152$ pies. 

EJEMPLO 3

Puente de peaje En un puente que conduce al parque estatal de la isla Honeymoon, sólo permiten el paso de vehículos de dos ejes. El peaje para motocicletas es de 50 centavos y para automóviles y camiones es de \$1.00. El sábado, el encargado de la caseta de cobro recolectó un total de \$150 y el contador de vehículos registró 170 vehículos que cruzaron el puente. ¿Cuántas motocicletas y cuántos automóviles y camiones cruzaron el puente ese día?

Solución

Entender y traducir Nos proporcionan suficiente información en el ejemplo para obtener dos ecuaciones para nuestro sistema de ecuaciones.

Sea x = número de motocicletas

y = número de automóviles y camiones

Como un total de 170 vehículos cruzaron el puente, una ecuación es $x + y = 170$. La segunda ecuación proviene del peaje recolectado.

monto de las motocicletas	+	monto de los automóviles y camiones	= 150
$0.50x$	+	$1.00y$	= 150

Sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} x + y = 170 \\ 0.50x + 1.00y = 150 \end{array} \right.$

Calcular Como de la primera ecuación se puede despejar y con facilidad, resolveremos este sistema por sustitución. Al despejar y en $x + y = 170$, se obtiene $y = 170 - x$. Al sustituir $170 - x$ por y en la segunda ecuación y resolver para x .

$$0.50x + 1.00y = 150$$

$$0.50x + 1.00(170 - x) = 150$$

$$0.50x + 170 - 1.00x = 150$$

$$170 - 0.5x = 150$$

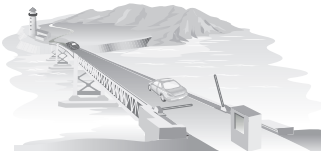
$$-0.5x = -20$$

$$\frac{-0.5x}{-0.5} = \frac{-20}{-0.5}$$

$$x = 40$$

Respuesta El puente lo cruzaron 40 motocicletas. El número total de vehículos que cruzaron el puente es 170. Por tanto, $170 - 40$ o 130 automóviles y camiones cruzaron el puente ese sábado. Una comprobación mostrará que el total recolectado de estos 170 vehículos es \$150. 

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 9**



EJEMPLO 4



Caballos en todas partes Muchas ciudades muestran estatuas de animales o de más temas por razones artísticas, de caridad u otras. Por ejemplo, las ciudades de Chicago; Beaufort, SC; Houston; Kansas City; Nueva York; Stanford, CT; y West Orange, NJ, han exhibido vacas. El área de Tampa ha exhibido tortugas, y Boston, bacalao. Lexington, KY, y Rochester, NY, han exhibido caballos (vea la fotografía).

Las joyerías de Mann están patrocinando dos caballos en una ciudad y considera dos artistas para diseñar y pintar los caballos. Una artista, Pam, ha indicado que los materiales necesarios para modificar el caballo estándar costarán \$2,200 y ella cobra \$80 por hora por pintar los caballos de acuerdo con las especificaciones. El otro artista, Mike, ha manifestado que los materiales que necesita para modificar el caballo costarán \$1,825 y él cobrará \$95 por hora para pintar los caballos.

a) ¿Cuántas horas se llevaría pintar los caballos para que el costo total de ambos artistas fuese el mismo?

b) Si ambos artistas estiman que el tiempo requerido para la pintura del caballo será de 20 horas, ¿cuál artista cobra menos?

Solución

a) Entender y traducir Escribiremos ecuaciones para el costo total para Pam y para Mike.

Sea n = número de horas de pintura

c = costo total del caballo

Pam

costo total = materiales + mano de obra

$$c = 2200 + 80n$$

Mike

costo total = materiales + mano de obra

$$c = 1825 + 95n$$

Ahora tenemos nuestro sistema de ecuaciones.

$$\text{Sistema de ecuaciones} \quad \begin{cases} c = 2200 + 80n \\ c = 1825 + 95n \end{cases}$$

Calcular

Costo total para Pam = costo total para Mike

$$2200 + 80n = 1825 + 95n$$

$$375 + 80n = 95n$$

$$375 = 15n$$

$$25 = n$$

Respuesta Si se requieren 25 horas de pintura, el costo sería el mismo.

b) Si la pintura toma 25 horas. Lo que cobra Mike sería menos costoso, como se muestra a continuación.

Pam

$$c = 2200 + 80n$$

$$c = 2200 + 80(20)$$

$$c = 3800$$

Mike

$$c = 1825 + 95n$$

$$c = 1825 + 95(20)$$

$$c = 3725$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 17



Problemas de movimiento con dos velocidades

En la sección 3.5 introdujimos la fórmula de distancia, distancia = velocidad · tiempo o $d = vt$. Ahora introducimos un método que utiliza dos variables y un sistema de ecuaciones para resolver problemas de movimiento que incluyan dos ve-

locidades. Con frecuencia, cuando resolvemos problemas de movimiento con dos velocidades diferentes, es útil construir una tabla que resuma la información dada. Haremos esto en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5 Reunión para comer Bob y Jim son dos buenos amigos que viven a 420 millas de distancia. Algunas veces se reúnen para comer en un restaurante en algún punto entre las ciudades donde viven. En una ocasión salieron de sus casas al mismo tiempo. Ambos tardaron 4 horas en llegar al restaurante. Determine la velocidad de Bob y la de Jim, si Bob conduce a un promedio de 5 millas por hora más rápido que Jim.

Solución a) **Entender y traducir** Nos piden determinar la velocidad de Bob y la de Jim. En el ejemplo nos dan información suficiente para obtener dos ecuaciones para nuestro sistema de ecuaciones.



FIGURA 8.14

Sea x = velocidad de Bob

Sea y = velocidad de Jim

Haremos un bosquejo para ayudar a entender el problema. Véase la figura 8.14. Utilizaremos la fórmula, distancia = velocidad $\cdot$ tiempo. Ambos viajaron durante 4 horas.

Viajero	Velocidad	Tiempo	Distancia
Bob	x	4	$4x$
Jim	y	4	$4y$

Como la distancia total recorrida es 420 millas, nuestra primera ecuación es

$$4x + 4y = 420$$

La segunda ecuación proviene del hecho que la velocidad de Bob fue 5 millas por hora mayor que la velocidad de Jim. Por tanto, podemos sumar 5 millas por hora a la velocidad de Jim para obtener la velocidad de Bob.

$$x = y + 5$$

Nuestro sistema de ecuaciones es

$$4x + 4y = 420$$

$$x = y + 5$$

Calcular La ecuación $x = y + 5$ ya tiene despejada x . Al sustituir $y + 5$ por x en la primera ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}
 4x + 4y &= 420 \\
 4(y + 5) + 4y &= 420 \\
 4y + 20 + 4y &= 420 \\
 8y + 20 &= 420 \\
 8y &= 400 \\
 y &= 50
 \end{aligned}$$

La velocidad de Jim es de 50 millas por hora. La velocidad de Bob es

$$\begin{aligned}
 x &= y + 5 \\
 x &= 50 + 5 \\
 x &= 55
 \end{aligned}$$

Revisar y responder La respuesta parece razonable. Podemos comprobar para ver si la ecuación $4x + 4y = 420$ es verdadera para $x = 55$ y $y = 50$.

$$\begin{aligned} 4x + 4y &= 420 \\ 4(55) + 4(50) &\stackrel{?}{=} 420 \\ 220 + 200 &\stackrel{?}{=} 420 \\ 420 &= 420 \quad \text{Verdadero.} \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 23**

Por tanto, la velocidad de Bob es 55 millas por hora y la velocidad de Jim es 50 millas por hora. 

Problemas de mezcla

En la sección 3.5 resolvimos problemas de mezcla con una variable. Ahora veremos problemas de mezcla utilizando dos variables y sistemas de ecuaciones. Recuerde que cualquier problema en que dos o más cantidades se combinan para producir una cantidad diferente, o una sola cantidad se separa en dos o más cantidades, puede considerarse un problema de mezcla. Nuevamente utilizaremos una tabla para resumir la información dada.

EJEMPLO 6 Tienda de dulces Hui Choe tiene una tienda de dulces y nueces. En la tienda hay dulce y nueces tanto a granel como en paquetes. Un cliente llega a la tienda y explica que necesita una gran cantidad de una mezcla de cerezas cubiertas con chocolate y de chocolates rellenos con amaretto. El cliente explica que él planea hacer paquetes individuales de la mezcla y dar un paquete a cada invitado a una cena. Las cerezas cubiertas con chocolate se venden en \$7.50 por libra y el chocolate relleno con amaretto se venden a \$6.00 por libra.

a) ¿Cuántas libras de chocolate relleno con amaretto deben mezclarse con 12 libras de cerezas cubiertas con chocolate para obtener una mezcla que se venda en \$6.50 por libra?

b) ¿Cuántas libras habrá de la mezcla?

Solución

a) Entender y traducir Nos piden determinar el número de libras de chocolate relleno con amaretto que se mezclará con 12 libras de cerezas cubiertas con chocolate. En el ejemplo nos dan información suficiente para obtener dos ecuaciones para nuestro sistema.

Sea x = número de libras de chocolate relleno con amaretto

y = número de libras de la mezcla.

Con frecuencia es útil hacer un bosquejo de la situación. Después de hacer un bosquejo, elaboraremos una tabla. En nuestro bosquejo utilizaremos cajas para mezclar los dulces (figura 8.15).

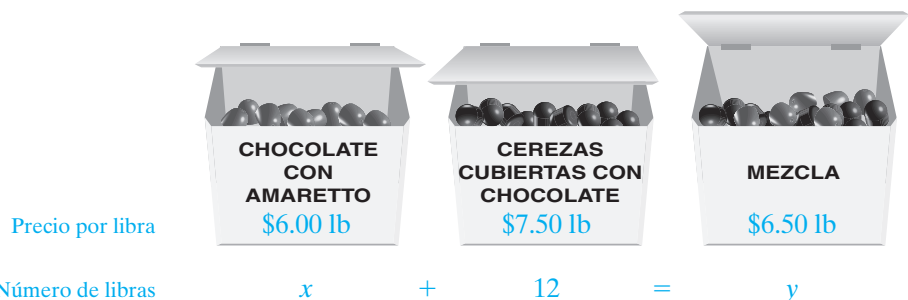


FIGURA 8.15

El valor de los dulces se determina multiplicando el número de libras por el precio por libra.

Dulce	Precio	Número de libras	Valor del dulce
Con amaretto	6	x	$6x$
Cerezas	7.50	12	$7.50(12)$
Mezcla	6.50	y	$6.50y$

Nuestras dos ecuaciones provienen de la información siguiente:

$$\left(\begin{array}{c} \text{número de libras de} \\ \text{chocolate con amaretto} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} \text{número de libras de} \\ \text{cereza con chocolate} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \text{número de libras} \\ \text{de la mezcla} \end{array} \right)$$

$x \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad 12 \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad y$

valor de chocolate con amaretto + valor de cerezas con chocolate = valor de la mezcla

$$6x \qquad \qquad \qquad + \qquad \qquad \qquad 7.50(12) \qquad \qquad \qquad = \qquad \qquad \qquad 6.50y$$

Sistema de ecuaciones $\left\{ \begin{array}{l} x + 12 = y \\ 6x + 7.50(12) = 6.50y \end{array} \right.$

Calcular Como $y = x + 12$, sustituimos $x + 12$ por y en la segunda ecuación y resolvemos para x .

$$\begin{aligned} 6x + 7.50(12) &= 6.50y \\ 6x + 7.50(12) &= 6.50(x + 12) \\ 6x + 90 &= 6.50x + 78 \\ 90 &= 0.50x + 78 \\ 12 &= 0.50x \\ 24 &= x \end{aligned}$$

Respuesta Por tanto, deben mezclarse 24 libras de chocolate relleno con amaretto con 12 libras de cerezas cubiertas con chocolate.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 33

b) La mezcla total pesará $24 + 12$ o 36 libras.



Ahora resolveremos un ejemplo similar al ejemplo 8 de la sección 3.5, pero esta vez utilizaremos un sistema de ecuaciones para resolverlo.

EJEMPLO 7 Laboratorio de química Eilish Main es una profesora de química, cuenta con diversas prácticas de laboratorio en las que sus estudiantes necesitarán utilizar una solución al 15% de ácido sulfúrico. Sus asistentes le informan que no hay solución al 15%. Eilish revisa en la bodega y encuentra que tiene una gran cantidad de soluciones al 5% y al 30%. Decide utilizar las soluciones al 5% y al 30% para elaborar 60 litros de una solución al 15%. ¿Cuántos litros de la solución al 5% y cuántos de la solución al 30% debe mezclar?

Solución **Entender y traducir** Eilish combinará las soluciones al 5% y al 30% para obtener 60 litros de una solución al 15% de ácido sulfúrico. Necesitamos determinar cuánto de cada una debe mezclarse.

Sea x = número de litros de solución al 5%
 y = número de litros de solución al 30%

El problema se muestra en la figura 8.16 y la información se resume en la siguiente tabla.

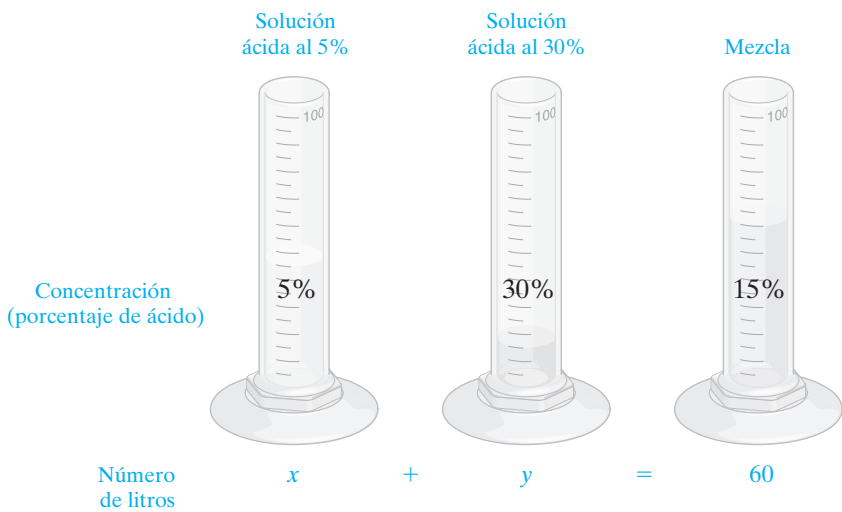


FIGURA 8.16

Solución	Número de litros	Concentración	Contenido de ácido
5% Solución	x	0.05	$0.05x$
30% Solución	y	0.30	$0.30y$
Mezcla	60	0.15	$0.15(60)$

Como el volumen total de la combinación es 60 litros, tenemos

$$x + y = 60$$

Con base en la tabla vemos que

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{l} \text{contenido de ácido} \\ \text{en la solución al 5\%} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{contenido de ácido} \\ \text{en la solución al 30\%} \end{array} \right) &= \left(\begin{array}{l} \text{contenido de ácido} \\ \text{en la mezcla} \end{array} \right) \\ 0.05x + 0.30y &= 0.15(60) \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + y = 60 \\ 0.05x + 0.30y = 0.15(60) \end{cases}$

Calcular Resolveremos este sistema por sustitución. Primero despejamos a y en la primera ecuación.

$$\begin{aligned} x + y &= 60 \\ y &= 60 - x \end{aligned}$$

Luego sustituimos $60 - x$ por y en la segunda ecuación.

$$\begin{aligned} 0.05x + 0.30y &= 0.15(60) \\ 0.05x + 0.30(60 - x) &= 9 \\ 0.05x + 18 - 0.30x &= 9 \\ -0.25x + 18 &= 9 \\ -0.25x &= -9 \\ x &= \frac{-9}{-0.25} = 36 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos para y .

$$y = 60 - x$$

$$y = 60 - 36$$

$$y = 24$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 31**

Respuesta Por tanto, deben mezclarse 36 litros de la solución de ácido al 5% con 24 litros de la solución de ácido al 30% para obtener 60 litros de una solución de ácido al 15%. 

Matemáticas en acción

¡Quién sabe lo complicado que son los helados!

El helado es una mezcla estructuralmente complicada de líquido, que contiene disueltas sales, azúcares y proteínas lácteas; pequeños cristales de hielo, y gotas de grasa de leche. Además, se inyecta aire en la mezcla cuando se congela y aumenta el volumen. La cantidad de aire está limitada, por un requisito gubernamental, a que un galón de helado debe pesar al menos 4.5 libras. También los helados deben contener 10% de grasa de leche. Los helados premium superan esos mínimos y pueden enviarse con 17% de grasa láctea y con un peso de 7.5 libras por galón.



Cuando los productores de helados formulan sus mezclas de ingredientes tienen que adoptar un enfoque de sistemas, balancear numerosos factores conforme ellos decidan cuánto usar de cada uno. ¿Perderían a los clientes conscientes de la dieta si las calorías son muchas? ¿Cuánto depende el control de las calorías de la cantidad de grasa y cuánto del azúcar? ¿Deben utilizar los mejores ingredientes naturales y agregar más aire para compensar el costo?

Al final, todas estas decisiones son incorporadas en una receta final para un producto hacia un mercado específico que podría ser de adultos no dietistas en hogares con un ingreso anual superior a una cantidad específica, o familias de bajos ingresos con muchos hijos. Puede ser muy complicado.

Todos en la organización de los fabricantes de helado, desde los catadores oficiales, los encargados del mercadeo, los ingenieros en alimentos hasta los contadores, tendrán una opinión. En esencia, la decisión de cuáles ingredientes utilizar está basada en un conjunto de ecuaciones interrelacionadas y otros criterios menos formales. La decisión final está determinada por una combinación de muchos intereses que afecta al sistema de ecuaciones utilizado en el proceso de la toma de decisiones. Pero finalmente alguien termina una receta y el producto sale al mercado.

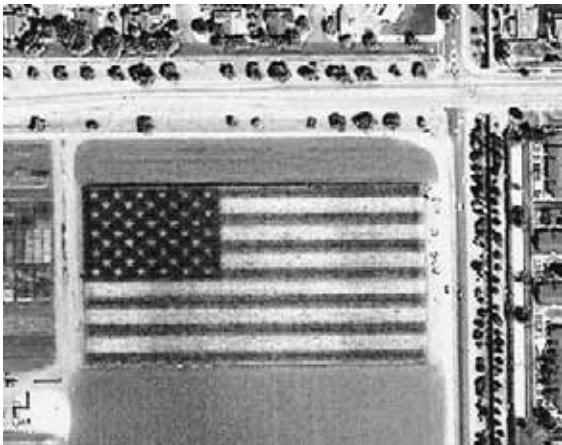
Conjunto de ejercicios 8.4

Práctica de habilidades resolución de problemas

En los ejercicios 1 a 38, utilice un sistema de ecuaciones lineales para determinar la solución. Utilice una calculadora en donde sea apropiado.

- 1. Suma de enteros** La suma de dos enteros es 41. Determine la suma si un número es 7 unidades mayor que el otro.
- 2. Diferencia de enteros** La diferencia de dos enteros es 25. Determine los dos números si el mayor es 1 unidad menor que el triple del menor.
- 3. Ángulos complementarios** Los ángulos A y B son ángulos complementarios. Si el ángulo B es 18° mayor que el ángulo A , determine la medida de cada ángulo. (Vea el ejemplo 1.)
- 4. Ángulos suplementarios** Dos ángulos son **ángulos suplementarios** cuando la suma de sus medidas es 180° . Si los ángulos A y B son suplementarios, y el ángulo A es cuatro veces mayor que el ángulo B , determine la medida de cada ángulo.

5. **Ángulos suplementarios** Si los ángulos A y B son suplementarios (vea el ejercicio 4) y el ángulo A es 24° mayor que el ángulo B , determine la medida de cada ángulo.
6. **Marco de una fotografía** El marco rectangular de una fotografía se fabricará de una moldura de 60 pulgadas de largo. ¿Cuáles son las dimensiones que tendrá el marco si la longitud es 6 pulgadas mayor que el ancho?
7. **Bandera de Estados Unidos** La siguiente fotografía es de una bandera floral que cubre 6.65 acres en Lompoc, California. La bandera conserva las dimensiones apropiadas de la bandera de Estados Unidos. El perímetro de la bandera es de 2,260 pies. Determine el largo y el ancho de la bandera si el largo es 350 pies mayor que el ancho.



8. **Cartas** Peter Collins, un agente de seguros, envió un total de 260 cartas por correo de primera clase. Algunas pesaban menos de 1 onza y necesitaron una estampilla de 37 centavos. El resto pesaba 1 onza o más pero menos de 2 onzas y necesitaron un franqueo de 60 centavos. Si el costo total del envío postal fue \$133.00, determine cuántas cartas se enviaron de cada uno de los costos de envío.
9. **Agricultura** Celeste Nossiter planta maíz y trigo en su granja de 100 acres, cerca de Albuquerque, Nuevo México. Ella estima que su ingreso, después de deducir los gastos, es de \$450 por acre de maíz y \$430 por acre de trigo. Determine el número de acres de maíz y de trigo sembrados si su ingreso total, después de gastos, es \$44,400.



10. **Lavado de automóviles** El lavado de automóviles Countryside Hand vende en \$21 un libro que contiene 20 cupones. Cada cupón permite al cliente tener un lavado de su automóvil en \$8.00, en lugar del precio regular de \$11.50. ¿Después de cuántos lavados de automóvil, utilizando los cupones en cada uno, la cantidad que el cliente se ahorra es igual al costo del libro de cupones?
11. **Kayak** Shane Staggs está navegando en un kayak en el río St. Lawrence. Él puede remar a 4.7 millas por hora con la corriente a favor y 3.4 millas por hora en contra de la corriente. Determine la velocidad del kayak en aguas tranquilas y la velocidad de la corriente.



12. **Vuelos en aerolíneas** Dos aviones comerciales vuelan en la misma área pero en direcciones opuestas. El avión de American Airlines vuela con el viento a favor a 560 millas por hora. El avión de U.S. Airway vuela en contra del viento a 510 millas por hora. Si no fuera por el viento, los dos aviones estarían volando con velocidades iguales. Determine la velocidad de cada avión con viento en calma y la velocidad del viento.
13. **Población** La población de Green Mountain es 40,000 y está creciendo 800 por año. La población de Pleasant View Valley es 66,000 y decrece 500 habitantes por año. ¿Cuánto tiempo pasará para que ambas áreas tengan la misma población?
14. **Almacén de descuento** El almacén de descuento Club Sol tiene dos planes de membresía. Con el plan A, el cliente paga una cuota anual de \$50 y 85% del precio de lista recomendado del fabricante. Con el plan B, la cuota anual es \$100 y el cliente paga 80% del precio de lista recomendado del fabricante. ¿Cuánto debería comprarse en mercancía, en pesos, para pagar la misma cantidad con los dos planes?
15. **Six flags** La familia Meyer tuvo una reunión familiar en Texas. Compraron boletos para visitar el parque de diversiones Six Flags. Los boletos de adulto cuestan \$40 y los de los niños \$30. Si se compraron 27 boletos y el costo total fue \$930, ¿cuántos boletos de adulto y cuántos de niño se compraron?
16. **Trabajo en ventas** Susan Summerlin, una vendedora, está considerando dos ofertas de trabajo. En la compañía Medtec el salario de Susan sería de \$300 semanales más una comisión de 5% de las ventas. En la compañía Genzone, su salario sería de \$200 a la semana más una comisión de 8% de las ventas.

- a) ¿Cuál es la cantidad en ventas que Susan necesitaría hacer para que el ingreso total en ambas compañías fuese el mismo?
- b) Si ella espera tener ventas de \$4,000, ¿cuál compañía daría un mayor salario?

17. Contrato de copiadora Carol Juncker acaba de comprar una copiadora de alta velocidad para su oficina y necesita un contrato de servicio para la copiadora. Ella está considerando dos contratos. La compañía Kate Spence Copier cobra \$18 al mes más 2 centavos por copia. Office Copier Depot cobra \$25 al mes y sólo 1.5 centavos por copia.

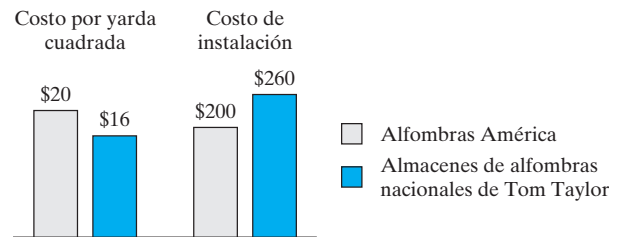
- a) Suponiendo que los precios no cambian, ¿cuántas copias necesitaría Carol hacer al mes para que el costo mensual sea el mismo en ambos planes?
- b) Si Carol planea hacer 2,500 copias al mes, ¿cuál plan sería el menos caro?

18. Asesor financiero Chris Suit es un asesor financiero para Walsh y asociados. Su salario es 40% fijo de comisiones por las ventas. Como empleado él no tiene gastos generales. Él está considerando iniciar su propia compañía. Entonces el 100% de las ventas serían un ingreso para él. Sin embargo, estima que sus gastos generales mensuales por renta de oficina, secretaria, servicios, etcétera, serían de alrededor de \$1,500 al mes. ¿Cuánto necesitaría Chris vender al mes en su propia compañía para hacer que el ingreso sea el mismo que como empleado de Walsh y asociados?

19. Cuenta de ahorro El señor y la señora Vinny McAdams invierten un total de \$8,000 en dos cuentas de ahorro. Una de ellas produce 10% de interés simple y la otra 8%. Determine la cantidad que invirtieron en cada cuenta si reciben un total de \$750 en interés al cabo de 1 año. Utilice la fórmula $\text{interés} = \text{capital} \cdot \text{tasa} \cdot \text{tiempo}$.

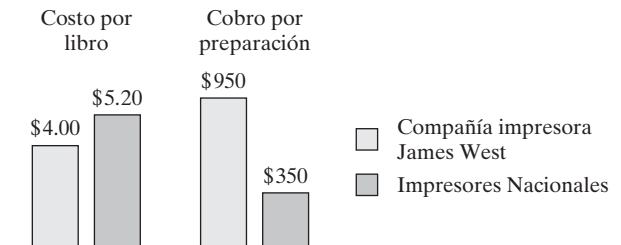
20. Inversiones Carol Horton invirtió un total de \$10,000. Parte del dinero se colocó en una cuenta de ahorros que paga 5% de interés simple. El resto se colocó en una anualidad que paga 6%. Si el total de interés recibido durante el año fue \$540, ¿cuánto se ha invertido en cada cuenta?

21. Alfombrado La siguiente gráfica de barras muestra el costo por yarda cuadrada de la misma alfombra en dos diferentes tiendas, junto con el costo de instalación (incluyendo el material) en cada tienda.



- a) Determine el número de yardas cuadradas de alfombra que Dorothy Rosen debe comprar para que el costo total de la alfombra más la instalación sea la misma en ambas tiendas.
- b) Si ella necesita comprar y tener instaladas 25 yardas cuadradas de alfombra, ¿en cuál tienda será más barato?

22. Autoedición Jorge Pérez escribió un libro que planea publicar. Consultó a dos impresores para determinar el costo de impresión de su libro. Cada compañía tiene una cuota por la preparación y una cuota por cada libro impreso. La información del costo se muestra en la siguiente gráfica de barras.



- a) ¿Cuántos libros necesitaría imprimir Jorge para que el costo total de sus libros sea el mismo con ambos impresores?
- b) Si él planea imprimir 1,000 libros, ¿cuál impresor le cobraría menos?

Revise el ejemplo 5 antes de resolver los ejercicios 23 a 30.

23. Viaje redondo Dave Visser comenzó a manejar desde Columbus, Ohio hacia Lincoln, Nebraska —una distancia de 903 millas—. Al mismo tiempo, Alice Harra empezó a conducir hacia Columbus, Ohio, desde Lincoln, Nebraska. Si los dos se encuentran al cabo de 7 horas y la velocidad promedio de Alice es 15 millas por hora más que la velocidad de Dave, determine la velocidad de cada automóvil.

24. Colocación de un cable Dos equipos de cableado de Lucent Technology están cavando una zanja para colocar un cable de fibra óptica. Un equipo de trabajo al mando de John Mayleben y un segundo equipo al mando de Leigh Sumeral inician en extremos opuestos de una extensión de tierra de 30 millas. El equipo de John excava a una velocidad promedio de 0.1 millas por hora más rápido que el equipo de Leigh. Si los dos equipos se encuentran después de 50 horas, determine la velocidad promedio de cada equipo.

- 25. Lancha rápida** Durante una carrera, la lancha rápida de Elizabeth Kell viajó 4 millas por hora más rápido que la lancha de Melissa Suárez. Si la de Elizabeth termina la carrera en 3 horas y la de Melissa en 3.2 horas, determine la velocidad de cada lancha.
- 26. Trenes** Dos trenes están separados 560 millas en un conjunto de vías paralelas viajando uno hacia el otro. Un tren viaja 6 millas por hora más rápido que el otro. Los trenes pasaron uno junto al otro en 4 horas. Determine la velocidad de los trenes.
- 27. Salida a correr** Amanda Rodríguez y Delores Meléndez trotan juntas en River Walk Trail en San Antonio, Texas. Comienzan en el mismo punto, pero Amanda inicia 0.3 horas antes que Delores. Si Amanda corre a una velocidad de 5 millas por hora y Delores lo hace a 8 millas por hora, ¿cuánto tardará Delores en alcanzar a Amanda?
- 28. Equitación** Bill Leonard trota, montado en su caballo Trixie, hacia el este a 8 millas por hora. Media hora después, Mary Mullaley inicia en el mismo punto y cabalga a medio galope en su caballo Pegarno, hacia el oeste a 16 millas por hora. ¿Cuánto tiempo después la distancia entre ambos será de 10 millas?



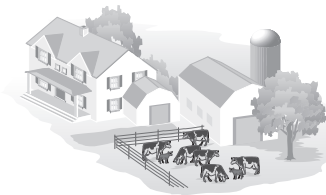
- 29. Paseo en un camino** Terri Teegarden ha estado patinando a 5 millas por hora durante 0.75 horas a lo largo de un camino cerca de Pebble Beach, California. Ella recibe una llamada telefónica de su amigo Randy Taylor. Randy le dice que él se encuentra en donde ella empezó el camino. Él le dice que siga patinando y que el conducirá su bicicleta para alcanzarla. Randy planea viajar a 10.5 millas por hora. A partir de que Randy comienza, ¿cuánto tiempo tardarán en encontrarse?
- 30. Rancho para vacaciones** Kate y Ernie Danforth están en un rancho de descanso. Kate ha estado montando a caballo durante 0.5 horas en el camino a 6 millas por hora cuando Ernie empieza a montar en su caballo por el camino. Si Ernie viaja a 10 millas por hora, ¿cuánto tiempo pasará antes de que él alcance a Kate?

Revise los ejemplos 6 y 7 antes de resolver los ejercicios 31 a 38.

- 31. Químico** Karl Schmidt, un químico, tiene una solución de ácido clorhídrico al 15% y una al 40%. ¿Cuántos litros de cada una debe mezclar para obtener 10 litros de una so-

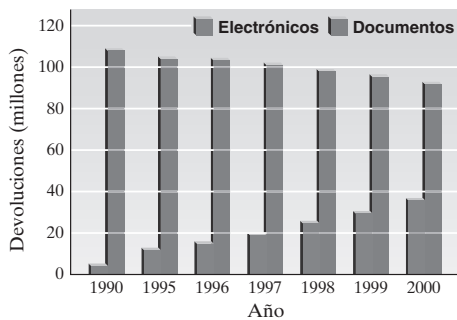
lución de ácido clorhídrico con una concentración de 30% de ácido?

- 32. Farmacéutica** Tamuka Williams, una farmacéutica, necesita 1,000 mililitros de una solución de fenobarbital al 10%. Ella sólo dispone de soluciones de fenobarbital al 5% y al 25%. ¿Cuántos mililitros de cada solución debe mezclar para obtener la solución deseada?
- 33. Colocación de mosaicos** Julie Hildebrand está seleccionando mosaico para su recibidor y su sala. Ella quiere hacer un patrón utilizando dos colores y tipos diferentes de mosaico. Un tipo cuesta \$3 por pie cuadrado y el otro \$5 por pie cuadrado. Ella necesita un total de 380 mosaicos pero no quiere gastar más de \$1,500 en ellos. ¿Cuál es el número máximo de mosaico de \$5 que ella puede comprar?
- 34. Hielo derretido** Una bebida de fruta es 8% de jugo por volumen. Se añade hielo a ella. Después de que se derrite el hielo, el jugo contenido en la mezcla de 8 onzas es 6%. Determine el volumen de la bebida de fruta y el volumen del hielo que se añadió.
- 35. Granja lechera** Wayne Froelich, un granjero, tiene leche que contiene 5% de grasa de leche y leche sin grasa. ¿Cuánta leche con 5% de grasa y cuánta leche sin grasa debe mezclar para hacer 100 galones de leche que tenga 3.5% de grasa?



- 36. Mezcla de soya** Lynn Hicks desea mezclar comida de soya que tiene 16% de proteína y comida de maíz que tiene 7% de proteína para obtener una mezcla de 300 libras con 10% de proteínas. ¿Cuánto debe utilizarse de cada una?
- 37. Jugo** La compañía Jugo Natural vende jugo de manzana a 12 centavos por onza y bebida de manzana a 6 centavos por onza. Desean comercializar y vender en 10 centavos una onza de una bebida que tenga parte de jugo y parte de la bebida de manzana. ¿Cuántas onzas de cada una se utilizarán si la bebida se venderá en botes de 8 onzas?
- 38. Quiche** La receta de Pierre LaRue para quiche de tocino requiere 16 onzas (o 2 tazas) de crema de leche, que tiene 20% de nata. Con frecuencia es difícil encontrar en el supermercado crema de leche con 20% de nata. La que es común encontrar es crema con 36% de nata, y leche con nata con 10.5% de nata. ¿Cuántas onzas de crema de leche y cuántas de leche de nata debe mezclarse para obtener 16 onzas de crema de leche que tenga 20% de nata?

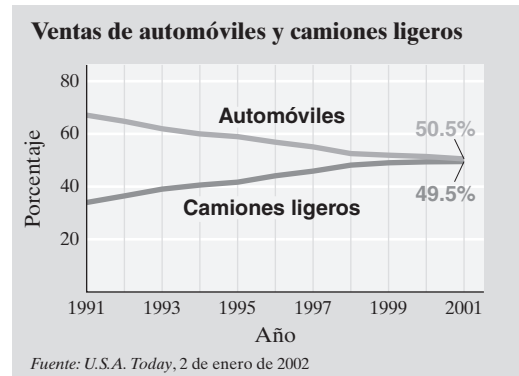
- 39. Impuestos federales** Como lo muestra la siguiente gráfica, cada vez más personas están solicitando su devolución de impuestos federales por medios electrónicos. Observe las barras grises, que representan las devoluciones en documentos, está disminuyendo a una tasa casi lineal, y las barras rojas, que representan devoluciones electrónicas, se incrementan a una tasa casi lineal. Podemos representar el número de devoluciones por medio de documentos, p , en millones, con la ecuación $p = -1.6x + 108$. Podemos representar el número de devoluciones por medios electrónicos, e , en millones, con la ecuación $e = 3.6x + 5$. Para cada ecuación, x representa el número de años a partir de 1990. Así, 1991 sería 1, 1992 sería 2, y así sucesivamente. Suponiendo que la tendencia continúe, utilice las ecuaciones dadas para estimar cuándo el número de devoluciones de impuestos por medios electrónicos serán iguales al número de devoluciones por medio de documentos.



Fuente: Money Magazine, marzo de 2001, página 98

- 40. Automóviles y camiones** La siguiente gráfica muestra que camiones ligeros (pickup, camionetas y minivan) superaron en ventas a los automóviles en Estados Unidos por primera vez en la historia en 2001. La ecuación que representa el porcentaje de automóviles, c , puede estimarse con la ecuación $c = -1.8x + 68$. La ecuación que representa el porcentaje de camiones ligeros, t , puede estimarse con la ecuación $t = 1.6x + 34$. Para ambas ecuaciones, x representa el número de años a partir de 1991. Así, 1992 sería 1, 1993, 2, y así sucesivamente.

- a) Utilizando las ecuaciones dadas, determine el año en que el porcentaje de ventas de camiones ligeros será igual al porcentaje de ventas de automóviles.
b) ¿La gráfica respalda su respuesta?

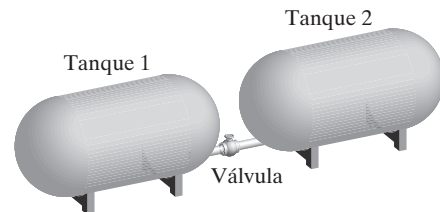


Fuente: U.S.A. Today, 2 de enero de 2002

Problemas de reto

- 41. Trotar** Los hermanos Sean y Moira O'Donnell trotan todos los días hacia la escuela. Sean, que es el mayor, corre a 9 millas por hora, y Moira, a 5 millas por hora. Cuando Sean llega a la escuela, Moira está a $1/2$ milla de distancia. ¿A qué distancia está la escuela de su casa?
- 42. Aleaciones** En peso, una aleación de latón es 70% de cobre y 30% de zinc. Otra aleación de latón tiene 40% de cobre y 60% de zinc. ¿Cuántos gramos de cada una de estas aleaciones deben fundirse y combinarse para obtener 300 gramos de una aleación de latón que tenga 60% de cobre y 40% de zinc?
- 43. Tanques presurizados** Dos tanques presurizados están conectados por medio de una válvula que controla la presión, como se muestra en la figura. Al inicio, la presión interna en el tanque 1 es 200 libras por pulgada cuadrada,

y la presión interna en el tanque 2 es de 20 libras por pulgada cuadrada. Abrimos un poco la válvula de presión para reducir la presión en el tanque 1, en 2 libras por pulgada cuadrada por minuto. Esto aumenta la presión en el tanque 2 en 2 libras por pulgada cuadrada por minuto. A esta tasa, ¿en cuánto tiempo la presión en ambos tanques será la misma?



Actividad en grupo

En grupo, analicen y resuelvan el ejercicio 44.

- 44. Compra de un automóvil** Debby Patterson está considerando 2 automóviles para comprar. El automóvil A tiene un precio de lista de \$16,500 y da un promedio de 40 millas por galón. El automóvil B tiene un precio de lista de \$15,500 y da un promedio de 20 millas por galón. Siendo ecologista, Debby desea comprar el automóvil A, pero es

tá preocupada por su mayor costo inicial. Ella planea conservar el automóvil durante muchos años. Si compra el automóvil A, ¿cuántas millas necesitaría manejar para que el costo total del automóvil A sea igual al costo total del automóvil B? Suponga que el costo de la gasolina es de \$1.25 por galón.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.10] 45. Nombre las propiedades ilustradas.

a) $x + 4 = 4 + x$

b) $(3x)y = 3(xy)$

c) $4(x + 2) = 4x + 8$

[3.4] 46. **Perímetro** El perímetro de un rectángulo es 22 pies. Determine el largo y el ancho del rectángulo, si el largo es dos unidades mayor que el doble del ancho.[6.6] 47. Resuelva la ecuación $x + \frac{2}{x} = \frac{6}{x}$.

[7.1] 48. ¿Qué es una gráfica?

8.5 SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES



1 Resolver de forma gráfica sistemas de desigualdades lineales.

1 Resolver de forma gráfica sistemas de desigualdades lineales

En la sección 7.5 aprendimos cómo graficar desigualdades lineales con dos variables. En la sección 8.1 aprendimos a resolver, en forma gráfica, sistemas de ecuaciones lineales. En esta sección analizamos la forma de resolver, en forma gráfica, sistemas de desigualdades lineales. La **solución para un sistema de desigualdades lineales** es el conjunto de puntos que satisface todas las desigualdades en el sistema. Aunque un sistema de desigualdades lineales puede tener más de dos desigualdades, en este libro, excepto en los ejercicios de actividad en grupo, consideraremos sistemas con sólo dos desigualdades.

Para resolver un sistema de desigualdades lineales de forma gráfica

Grafique cada desigualdad en los mismos ejes. La solución es el conjunto de puntos que satisfacen todas las desigualdades en el sistema.

EJEMPLO 1 Determine la solución para el siguiente sistema de desigualdades.

$$x + 2y \leq 6$$

$$y > 2x - 4$$

Solución Primero grafique la desigualdad $x + 2y \leq 6$ (figura 8.17) como se explicó en la sección 7.5. Ahora, en los mismos ejes, grafique la desigualdad $y > 2x - 4$ (figura 8.18). Observe que la recta es punteada. ¿Por qué?

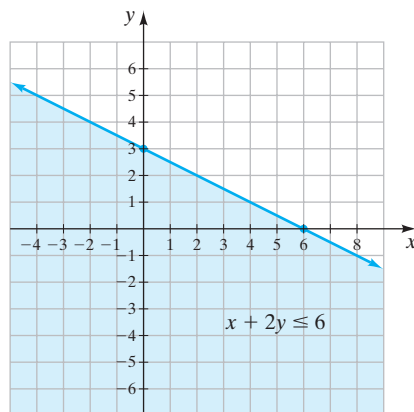


FIGURA 8.17

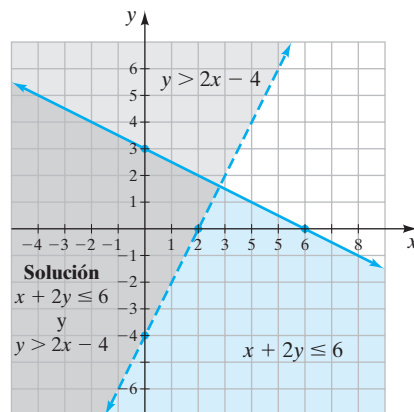


FIGURA 8.18

La solución es el conjunto de puntos comunes a ambas desigualdades —la parte de la gráfica que tiene ambos tipos de sombreado—. La recta punteada no es parte de la solución. Sin embargo, la parte de la recta continua que satisface ambas desigualdades es parte de la solución.

En el ejemplo 1, los pares ordenados de cada uno de los puntos en la solución (el área en gris oscuro) satisface ambas desigualdades en el sistema. Debemos ser capaces de seleccionar cualquier punto en la región sombreada, sustituir sus valores de x y y en *ambas* desigualdades y obtener enunciados verdaderos. Suponga que elegimos el origen, que está en el área sombreada. Sea (x, y) igual a $(0, 0)$.

$$\begin{array}{ll} x + 2y \leq 6 & y > 2x - 4 \\ 0 + 2(0) \leq 6 & 0 > 2(0) - 4 \\ 0 \leq 6 & 0 > -4 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Verdadero.} \\ \text{Verdadero.} \end{array}$$

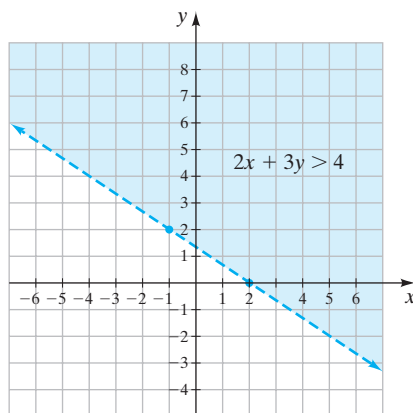
Como esperábamos, el par ordenado $(0, 0)$ satisface ambas desigualdades.

EJEMPLO 2 Determine la solución del sistema de desigualdades.

$$2x + 3y > 4$$

$$2x - y \geq -6$$

Solución Grafique $2x + 3y > 4$ (figura 8.19). Grafique $2x - y \geq -6$ en los mismos ejes (figura 8.20). La solución es la parte en la gráfica que está sombreada y la parte de la recta continua que satisface ambas desigualdades.



AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 11

FIGURA 8.19

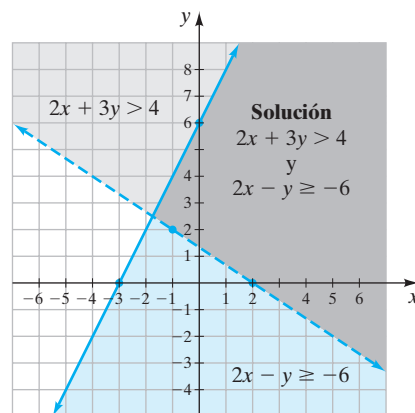


FIGURA 8.20

EJEMPLO 3 Determine la solución para el siguiente sistema de desigualdades.

$$y < 2$$

$$x > -3$$

Solución Grafique ambas desigualdades en los mismos ejes (figura 8.21). La solución es la parte de la gráfica que está sombreada.

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 15

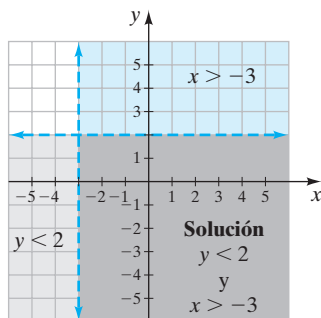


FIGURA 8.21

Es posible que un sistema de desigualdades lineales no tenga solución. Esto puede suceder si las gráficas de las desigualdades son rectas que tienen la misma pendiente y son paralelas entre ellas. Por ejemplo, el sistema de desigualdades $x + y \leq 2$ y $x + y \geq 4$ no tiene solución.

Conjunto de ejercicios 8.5

Ejercicios conceptuales

1. Si un par ordenado satisface ambas desigualdades de un sistema de desigualdades lineales, ¿ese par debe estar en la solución del sistema? Explique.
2. Si un par ordenado satisface sólo una desigualdad en un sistema de desigualdades lineales, ¿es posible que ese par ordenado esté en la solución del sistema? Explique.
3. ¿Un sistema de desigualdades lineales puede no tener solución? Explique su respuesta mediante un ejemplo propio.
4. ¿Es posible construir un sistema de dos desigualdades no paralelas que no tenga solución? Explique.

Práctica de habilidades

Determine la solución de cada sistema de desigualdades.

- | | | | |
|-------------------------------------|--|--|--|
| 5. $x + y > 2$
$x - y < 2$ | 6. $y \leq 3x - 2$
$y > -4x$ | 7. $y \leq x$
$y < -2x + 2$ | 8. $2x + 3y < 6$
$4x - 2y \geq 8$ |
| 9. $y < -2x - 3$
$y \geq 3x + 2$ | 10. $x + 3y \geq 6$
$2x - y > 4$ | 11. $x - 2y < 6$
$y \leq -x + 4$ | 12. $y \leq 3x + 4$
$y < 2$ |
| 13. $4x + 5y < 20$
$x \geq -3$ | 14. $3x - 4y \leq 12$
$y > -x + 4$ | 15. $x \leq 4$
$y \geq -2$ | 16. $x \leq 0$
$y \leq 0$ |
| 17. $x > -3$
$y > 1$ | 18. $4x + 2y > 8$
$y \leq 2$ | 19. $-2x + 3y \geq 6$
$x + 4y \geq 4$ | 20. $2x - y \leq 3$
$4x + 2y > 8$ |
| 21. $x - 3y > 3$
$2x - 6y < 6$ | 22. $2x - y < 4$
$4x - 2y \geq -10$ | 23. $2x + 4y > 6$
$4x + 8y < 4$ | 24. $x - 3y \leq 6$
$x + 3y \leq 6$ |

Solución de problemas

25. ¿Es posible que un sistema de dos desigualdades lineales tenga sólo una solución? Explique.
26. Construya un sistema de dos desigualdades lineales que no tenga solución. Explique cómo determinó su respuesta.



Actividad en grupo

En cursos de matemáticas más avanzadas y al trabajar en muchas industrias, podría necesitar graficar más de dos desigualdades lineales. Cuando un sistema tiene más de dos desigualdades, la solución es el punto o puntos que satisfacen todas las desigualdades en el sistema. En grupo, determinen las soluciones para los sistemas de desigualdades en los ejercicios 27 y 28.

- | | |
|--|--|
| 27. $x + 2y \leq 6$
$2x - y < 2$
$y > 2$ | 28. $x \geq 0$
$y \geq 0$
$y \leq 2x + 4$
$y \leq -x + 6$ |
|--|--|

Ejercicios de repaso acumulativo

- | | |
|--|---|
| [2.7] 29. Resuelva la desigualdad y grafique la solución en una recta numérica: $6(x - 2) < 4x - 3 + 2x$. | [5.6] 31. Resuelva la ecuación $4x^2 - 11x - 3 = 0$. |
| [3.1] 30. Despeje y en la ecuación $2x - 5y = 6$. | [6.2] 32. Simplifique $\frac{x^{-6}y^2}{x^3y^{-4}}$. |

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Términos y frases importantes

8.1

Método gráfico para resolver un sistema de ecuaciones lineales

Sistema consistente de ecuaciones

Sistema de ecuaciones lineales

Sistema dependiente de ecuaciones

Sistema inconsistente de ecuaciones

Solución para un sistema de ecuaciones lineales

8.2

Método por sustitución para resolver un sistema de ecuaciones lineales

8.3

Método de suma y resta (reducción o eliminación) para resolver un sistema de ecuaciones lineales

8.4

Ángulos complementarios
Ángulos suplementarios

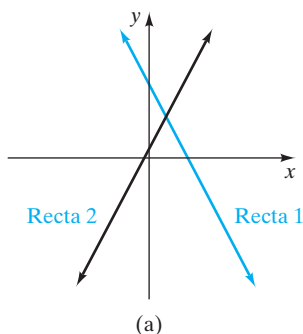
8.5

Sistema de desigualdades lineales

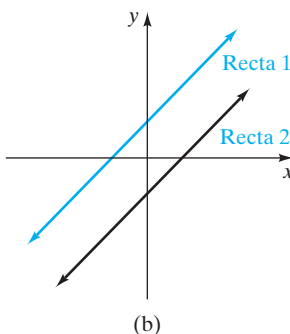
Solución para un sistema de desigualdades lineales

HECHOS IMPORTANTES

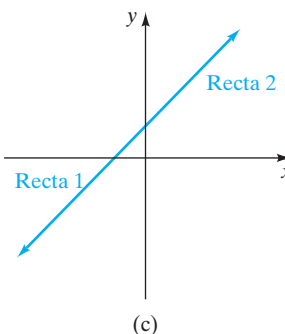
Consistente,
exactamente 1 solución



Inconsistente,
ninguna solución



Dependiente,
un número infinito de soluciones



Los tres métodos utilizados para resolver un sistema de ecuaciones lineales son (1) el método gráfico, (2) el método por sustitución, y (3) el método de suma y resta (reducción o eliminación). Al resolver un sistema de ecuaciones lineales por el método de sus-

titución o el de suma, si obtiene un enunciado falso, como $6 = 0$, el sistema es inconsistente y no tiene solución. Si obtiene un enunciado verdadero, como $0 = 0$, el sistema es dependiente y tiene un número infinito de soluciones.

Ejercicios de repaso del capítulo

[8.1] Determine cuál, si hay uno, de los pares ordenados satisfacen cada sistema de ecuaciones.

1. $y = 4x - 2$
 $2x + 3y = 8$

a) $(0, -2)$

b) $(-2, 4)$

c) $(1, 2)$

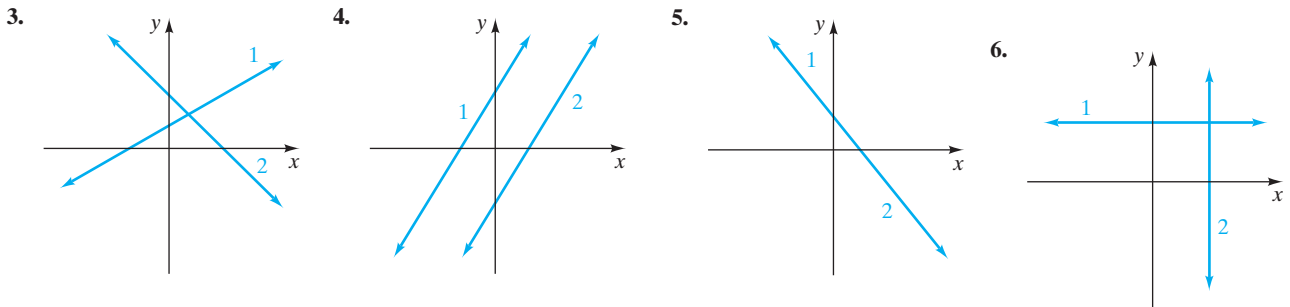
2. $y = -x + 4$
 $3x + 5y = 15$

a) $\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$

b) $(0, 4)$

c) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$

Identifique cada sistema de ecuaciones lineales como consistente, inconsistente o dependiente. Indique si el sistema tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.



Escriba cada ecuación en la forma pendiente-ordenada al origen. Sin graficar o resolver el sistema de ecuaciones, indique si el sistema de ecuaciones lineales tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

- | | | | |
|-------------------------------------|-----------------------------------|---|------------------------------------|
| 7. $x + 2y = 10$
$3x = -6y + 12$ | 8. $y = -3x - 6$
$2x + 5y = 8$ | 9. $y = \frac{1}{2}x - 4$
$x - 2y = 8$ | 10. $6x = 4y - 8$
$4x = 6y + 8$ |
|-------------------------------------|-----------------------------------|---|------------------------------------|

Determine, de forma gráfica, la solución para cada sistema de ecuaciones.

- | | | | |
|-----------------------------------|----------------------------------|------------------------------------|---|
| 11. $y = x - 4$
$y = 2x - 7$ | 12. $x = -2$
$y = 3$ | 13. $y = 3$
$y = -2x + 5$ | 14. $x + 3y = 6$
$y = 2$ |
| 15. $x + 2y = 8$
$2x - y = -4$ | 16. $y = x - 3$
$2x - 2y = 6$ | 17. $3x + y = 0$
$3x - 3y = 12$ | 18. $x + 2y = 4$
$\frac{1}{2}x + y = -2$ |

[8.2] Determine, por sustitución, la solución para cada sistema de ecuaciones.

- | | | | |
|------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|-----------------------------------|
| 19. $y = 3x - 13$
$2x - 5y = 0$ | 20. $x = 3y - 9$
$x + 2y = 1$ | 21. $2x - y = 6$
$x + 2y = 13$ | 22. $x = -3y$
$x + 4y = 6$ |
| 23. $4x - 2y = 10$
$y = 2x + 3$ | 24. $2x + 4y = 8$
$4x + 8y = 16$ | 25. $2x - 3y = 8$
$6x + 5y = 10$ | 26. $3x - y = -5$
$x + 2y = 8$ |

[8.3] Mediante el método de suma y resta, determine la solución para cada sistema de ecuaciones.

- | | | | |
|---------------------------------------|------------------------------------|--|--------------------------------------|
| 27. $-x - y = 6$
$-x + y = 10$ | 28. $x + 2y = -3$
$2x - 2y = 6$ | 29. $x + y = 12$
$2x + y = 5$ | 30. $4x - 3y = 8$
$2x + 5y = 8$ |
| 31. $-2x + 3y = 15$
$3x + 3y = 10$ | 32. $2x + y = 9$
$-4x - 2y = 4$ | 33. $3x = -4y + 10$
$8y = -6x + 20$ | 34. $2x - 5y = 12$
$3x - 4y = -6$ |

[8.4] Utilice un sistema de ecuaciones lineales para determinar la solución.

35. **Suma de enteros** La suma de dos enteros es 49. Determine los dos números, si el mayor es 8 unidades menos que el doble del menor.
36. **Vuelo en avión** Un avión vuela a 600 millas por hora con el viento a favor, y 530 millas por hora en contra del viento. Determine la velocidad del viento y la velocidad del avión con viento en calma.
37. **Renta de un camión** La compañía de renta de camiones de Katz cobra \$30 por día, más 50 centavos por milla, mientras que la renta de camiones de Willie cobra \$40 diarios, más 40 centavos por milla. ¿Cuánto debe recorrer en un día para que el costo total en ambas compañías de renta sea el mismo?
38. **Cuenta de ahorros** Moura Hakal invirtió un total de \$16,000. Parte del dinero se colocó en una cuenta de ahorros que paga 4% de interés simple. El resto se colocó en una que paga 6%. Si el interés total recibido en un año fue \$760, ¿cuánto invirtió Moura en cada cuenta?
39. **Viaje** Liz Wood conduce desde Charleston, Carolina del Sur, hasta Louisville, Kentucky —una distancia de 600 millas—. Al mismo tiempo, Mary Mayer inicia a conducir desde Louisville a Charleston en la misma ruta. Si ellas se

encuentran después de conducir durante 5 horas y el promedio de velocidad de Mary fue de 6 millas por hora mayor que el de Liz, determine la velocidad promedio de cada automóvil.



[8.5] Determine la solución de cada sistema de ecuaciones.

42. $2x + y > 2$
 $2x - y \leq 4$

43. $2x - 3y \leq 6$
 $x + 4y > 4$

44. $2x - 6y > 6$
 $x > -2$

45. $x < 2$
 $y \geq -3$

Examen de práctica del capítulo

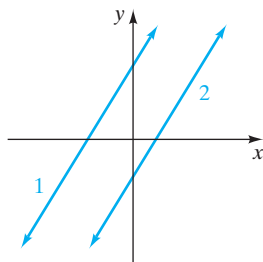
1. Determine cuáles, si hay, de los pares ordenados satisfacen el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} x + 2y &= -6 \\ 3x + 2y &= -12 \end{aligned}$$

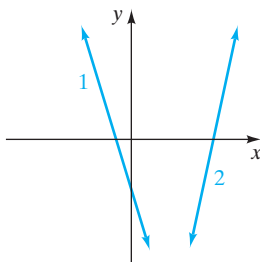
- a) $(0, -6)$ b) $\left(-3, -\frac{3}{2}\right)$ c) $(2, -4)$

Identifique cada sistema como consistente, inconsistente o dependiente. Indique si el sistema tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

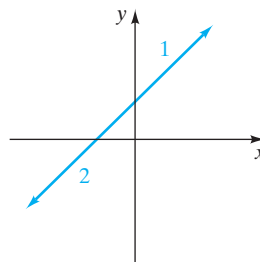
2.



3.



4.



Escriba cada ecuación en la forma pendiente ordenada al origen. Luego determine, sin graficar ni resolver el sistema, si el sistema de ecuaciones tiene exactamente una solución, ninguna o un número infinito de soluciones.

5. $-3y = 6x - 9$
 $2x + y = 6$

6. $3x + 2y = 10$
 $3x - 2y = 10$

7. $4x = 6y - 12$
 $2x - 3y = -6$

8. Al resolver un sistema de ecuaciones lineales, por sustitución o por suma y resta, ¿cómo sabrá si el sistema es
a) inconsistente, b) dependiente?

Resuelva, en forma gráfica, cada sistema de ecuaciones.

9. $y = 2x - 4$
 $y = -2x + 8$

10. $3x - 2y = -3$
 $3x + y = 6$

11. $y = 2x + 4$
 $4x - 2y = 6$

Resuelva por sustitución cada sistema de ecuaciones.

12. $3x + y = 8$
 $x - y = 6$

13. $3x - 4y = 8$
 $4x + 2y = 18$

14. $y = 5x - 7$
 $y = 3x + 5$

Resuelva por suma y resta cada sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 15. \quad & 4x + y = -6 \\ & x + 3y = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 16. \quad & 3x + 2y = 12 \\ & -2x + 5y = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 17. \quad & 5x - 10y = 20 \\ & x = 2y + 4 \end{aligned}$$

Resuelva cada sistema de ecuaciones utilizando el método que usted prefiera.

$$\begin{aligned} 18. \quad & y = 3x - 7 \\ & y = -2x + 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 19. \quad & 3x + 5y = 20 \\ & 6x + 3y = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 20. \quad & 4x - 6y = 8 \\ & 3x + 5y = 10 \end{aligned}$$

Utilice un sistema de ecuaciones lineales para determinar la solución.

21. **Renta de un camión** La agencia de renta de camiones de Charley cobra \$54 diarios, más 8 centavos por milla por la renta de cierto camión. La compañía de Hugh cobra \$40 por día, más 15 centavos por milla por la renta del mismo camión. ¿Cuántas millas tendrá que conducir en un día para que el costo del camión de Charly sea igual al costo del camión de Hugh?
22. **Dulces** El almacén de Albert vende dulces de limón envueltos de forma individual en \$6.00 por libra y dulces de

mantequilla envueltos en forma individual en \$4.50 por libra. ¿Cuánto de cada uno debe mezclar Albert para obtener 20 libras de una mezcla que pueda vender en \$5.00 por libra?

23. **Carrera en lancha** Durante una carrera, la lancha rápida de Dante Hull viaja 4 millas por hora más rápido que la lancha rápida de Deja Rocket. Si la lancha de Dante termina la carrera en 3 horas y la de Deja en 3.2 horas, determine la velocidad de cada lancha.

Determine la solución para cada sistema de desigualdades. 4., 25.

$$\begin{aligned} 24. \quad & 2x + 4y < 8 \\ & x - 3y \geq 6 \end{aligned}$$

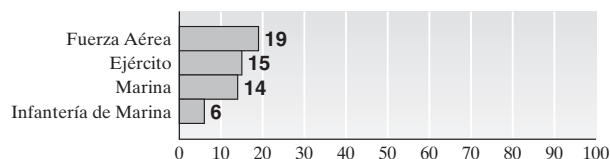
$$\begin{aligned} 25. \quad & x + 3y \geq 6 \\ & y < 3 \end{aligned}$$

Examen de repaso acumulativo

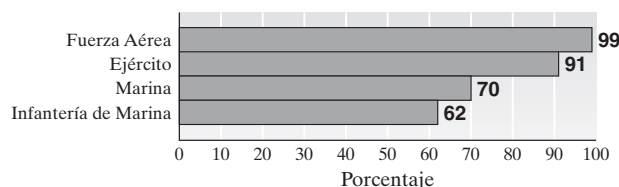
Resuelva el siguiente examen y confronte sus respuestas con las que aparecen al final. Repase cualquier pregunta que haya respondido de manera incorrecta. La sección y el objetivo en donde se estudió el material se indica a continuación de la respuesta.

1. **Mujeres en la milicia** Las mujeres están desempeñando un papel cada vez más importante en la milicia de Estados Unidos. Las mujeres han servido en las fuerzas armadas de Estados Unidos desde 1901, cuando quedó establecido el Cuerpo de enfermeras de la armada. El número de mujeres en la milicia ha crecido de forma radical desde 1967, cuando los militares abolieron el tope de 2% sobre las mujeres que servían en las fuerzas armadas. Las siguientes gráficas proporcionan información sobre las mujeres y los militares.

Porcentaje de mujeres en ramas de la milicia



Porcentaje de puestos militares abiertos a mujeres



Fuente: Departamento de Defensa; Investigación e Instituto de la Mujer

- a) ¿Qué rama de la milicia está compuesta por al menos 15% de mujeres?
- b) ¿Qué ramas de la milicia están compuestas por al menos 10% de mujeres y tienen al menos 70% de los puestos militares abiertos a mujeres?
2. Considere el conjunto de números $\{-5, -0.6, \frac{3}{5}, \sqrt{7}, -\sqrt{2}, 7, 0, -\frac{5}{9}, 1.34\}$.
Liste los elementos que son
- a) números naturales.
- b) números racionales.
- c) números irracionales.
- d) números reales.
3. Simplifique $-237 + 63 + (-192)$.
4. Simplifique $8 - (3a - 2) + 4(a + 3)$.
5. Resuelva la ecuación $2(x - 4) + 2 = 3x - 4$.
6. Resuelva la desigualdad $3x - 4 \leq x + 6$. Grafique la solución en una recta numérica.
7. Despeje a en la fórmula $P = 2l + 2a$.
8. **Selección de un plan salarial** María Gentle se acaba de graduar y ha aceptado un puesto en venta de software. Le dan dos opciones de planes de salario. El plan A es una comisión directa de 12% sobre las ventas. El plan B es

\$350 semanales más 6% de comisión sobre las ventas. ¿Cuánto debe vender María a la semana para que ambos planes tengan el mismo salario semanal?

9. **Ángulos de un triángulo** Un ángulo de un triángulo mide 20° más que el ángulo menor. El tercer ángulo mide 6 veces el ángulo más pequeño. Determine la medida de cada uno de los tres ángulos.

10. Simplifique $(5x^3y^2)^3(x^2y)$.

11. Multiplique $(x - 2y)^2$.

12. Factorice $2n^2 - 5n - 12$.

13. Resuelva $x^2 - 3x - 40 = 0$.

14. Multiplique $\frac{x^2 - 4x - 12}{3x} \cdot \frac{x^2 - x}{x^2 - 7x + 6}$.

15. Resuelva $\frac{2x + 3}{3} = \frac{x - 2}{2}$.

16. Grafique $2x - 4y = 8$.

17. Grafique $\frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 12$.

18. Determine si el sistema de ecuaciones

$$3x - y = 6$$

$$\frac{3}{2}x - 3 = \frac{1}{2}y$$

tiene una solución, ninguna o un número infinito de soluciones. Explique cómo determinó su respuesta.

19. Resuelva, de forma gráfica, el siguiente sistema de ecuaciones.

$$2x + y = 5$$

$$x - 2y = 0$$

20. Por el método de suma y resta, resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

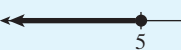
$$3x - 2y = 8$$

$$-6x + 3y = 2$$

Respuestas al examen de repaso acumulativo

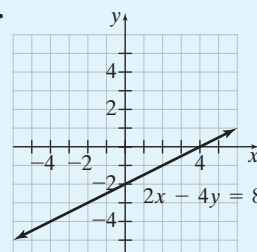
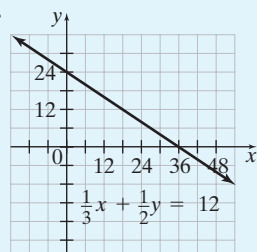
1. a) Fuerza Aérea, Ejército b) Fuerza Aérea, Ejército, Marina; [Sec. 1.2, Obj. 2] 2. a) 7 b) $-5, -0.6, \frac{3}{5}, 7, 0, -\frac{5}{9}, 1.34$

c) $\sqrt{7}, -\sqrt{2}$ d) $-5, -0.6, \frac{3}{5}, \sqrt{7}, -\sqrt{2}, 7, 0, -\frac{5}{9}, 1.34$; [Sec. 1.4, Obj. 2] 3. -366 ; [Sec. 1.7, Obj. 3] 4. $a + 22$;

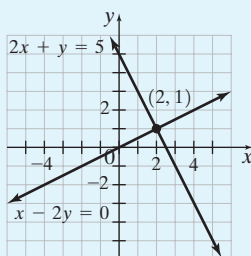
[Sec. 2.1, Obj. 6] 5. -2 ; [Sec. 2.5, Obj. 1] 6. $x \leq 5$; ; [Sec. 2.7, Obj. 1] 7. $a = \frac{P - 2I}{2}$; [Sec. 3.1, Obj. 3]

8. 5833.33 [Sec. 3.3, Obj. 4] 9. $20^\circ, 40^\circ, 120^\circ$; [Sec. 3.4, Obj. 1] 10. $125x^{11}y^7$; [Sec. 4.1, Obj. 3] 11. $x^2 - 4xy + 4y^2$;

[Sec. 4.5, Obj. 5] 12. $(2n + 3)(n - 4)$; [Sec. 5.4, Obj. 1] 13. $-5, 8$; [Sec. 5.6, Obj. 2] 14. $\frac{x + 2}{3}$; [Sec. 6.2, Obj. 1]

15. -12 ; [Sec. 6.6, Obj. 1] 16. ; [Sec. 7.2, Obj. 3] 17. ; [Sec. 7.2, Obj. 3]

18. Un número infinito de soluciones; [Sec. 8.1, Obj. 2].



; [Sec. 8.1, Obj. 3]

20. $\left(-\frac{28}{3}, -18\right)$; [Sec. 8.3, Obj. 1]

Capítulo 10

Ecuaciones cuadráticas



- 10.1** La propiedad de la raíz cuadrada
- 10.2** Solución de ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado
- 10.3** Solución de ecuaciones cuadráticas por medio de la fórmula cuadrática (fórmula general)
- 10.4** Graficación de ecuaciones cuadráticas
- 10.5** Números complejos

Resumen del capítulo
Ejercicios de repaso del capítulo
Examen de práctica del capítulo
Examen de repaso acumulativo

Con frecuencia vemos objetos que se lanzan hacia arriba, pero casi nunca pensamos en la matemática que describe el movimiento del objeto. Por ejemplo, cuando una pelota choca con un bat, o un niño patea un balón de fútbol, éste es lanzado hacia arriba. Cuando disparamos una bala de cañón, lanzamos un cohete o golpeamos una pelota, el objeto se lanza hacia arriba. En el ejercicio 69 de la página 637 y en el ejercicio 63 de la página 648 describimos la distancia a la que se encuentra un objeto, respecto al suelo, en tiempos específicos después de que el objeto es lanzado hacia arriba.



Avance de la lección

Gran parte de este libro estudia la resolución de ecuaciones lineales. Las ecuaciones cuadráticas son otra importante categoría de ecuaciones. Éstas se introdujeron en la sección 5.6 y se resolvieron por medio de factorización. Ahora podría revisar esa sección. Recuerde que las ecuaciones cuadráticas tienen la forma $ax^2 + bx + c = 0$, en donde $a \neq 0$. No toda ecuación cuadrática puede resolverse por medio de factorización. En este capítulo presentaremos dos métodos adicionales para resolver ecuaciones cuadráticas: completar el cuadrado y la fórmula cuadrática (o fórmula general).

En la sección 10.1 presentaremos la propiedad de la raíz cuadrada. En la sección 10.2 resolveremos ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado, por medio de la propiedad de la raíz cuadrada. La fórmula cuadrática o general, que analizaremos en la sección 10.3, se utiliza con mayor frecuencia cuando resolvemos ecuaciones cuadráticas que no pueden factorizarse. En el capítulo 7 graficamos ecuaciones lineales. En la sección 10.4 graficaremos ecuaciones cuadráticas. La sección 10.4 es una sección muy importante, ya que sienta las bases para la graficación de ecuaciones cúbicas y de grado mayor en otros cursos de matemáticas. En la sección 10.5 introduciremos el sistema de los números complejos. Si toma un curso de álgebra intermedia u otros cursos de matemáticas, usted podrá analizar este tema con mayor detalle.

10.1 LA PROPIEDAD DE LA RAÍZ CUADRADA



- 1 Todo número real positivo tiene dos raíces cuadradas.
- 2 Resolver ecuaciones cuadráticas mediante la propiedad de la raíz cuadrada.

En la sección 5.6, resolvimos ecuaciones cuadráticas por factorización. Recuerde que las **ecuaciones cuadráticas** son ecuaciones de la forma

$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde a , b y c son números reales, $a \neq 0$. Decimos que una ecuación cuadrática en esta forma, se encuentra en **forma estándar**. La técnica preferida para resolver ecuaciones cuadráticas es la factorización cuando los factores se pueden encontrar con rapidez. Para recordar un poco, a continuación resolveremos la ecuación $x^2 - 3x - 10 = 0$ por factorización. Si necesita más ejemplos, revise la sección 5.6.

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$(x - 5)(x + 2) = 0$$

$$x - 5 = 0 \quad \text{o bien} \quad x + 2 = 0$$

$$x = 5 \qquad \qquad \qquad x = -2$$

Las soluciones para esta ecuación son 5 y -2 .

No toda ecuación cuadrática puede factorizarse con facilidad, y muchas no pueden factorizarse con números reales. En este capítulo damos dos técnicas, completando el cuadrado y la fórmula cuadrática o general, para resolver ecuaciones cuadráticas que no pueden resolverse por factorización.

1 Todo número real positivo tiene dos raíces cuadradas

En la sección 9.1 establecimos que todo número positivo tiene dos raíces cuadradas. Hasta aquí, sólo hemos utilizado la raíz cuadrada positiva o principal. En esta sección utilizamos las dos raíces de un número, la positiva y la negativa. Por ejemplo, la raíz cuadrada positiva de 49 es 7.

$$\sqrt{49} = 7$$

La raíz cuadrada negativa de 49 es -7 .

$$-\sqrt{49} = -7$$

Observe que $7 \cdot 7 = 49$ y $(-7)(-7) = 49$. Las dos raíces cuadradas de 49 son $+7$ y -7 . Una forma conveniente de indicar las dos raíces cuadradas es utilizar el símbolo de más o menos, $\pm$. Por ejemplo, las raíces cuadradas de 49 pueden indicarse ± 7 , que se lee “más o menos 7”.

Número	Ambas raíces cuadradas
64	± 8
100	± 10
3	$\pm \sqrt{3}$

El valor de un número como $-\sqrt{5}$ puede determinarse encontrando el valor de $\sqrt{5}$ en su calculadora y luego tomando su valor opuesto o negativo.

$$\begin{aligned}\sqrt{5} &= 2.24 && (\text{redondeado al centésimo más cercano}). \\ -\sqrt{5} &= -2.24\end{aligned}$$

Ahora considere la ecuación.

$$x^2 = 49$$

Por sustitución, podemos ver que esta ecuación tiene dos soluciones: 7 y -7 .

Comprobación	$x = 7$	$x = -7$
	$x^2 = 49$	$x^2 = 49$
	$7^2 \stackrel{?}{=} 49$	$(-7)^2 \stackrel{?}{=} 49$
	$49 = 49$ Verdadero.	$49 = 49$ Verdadero.

Por tanto, las soluciones para la ecuación $x^2 = 49$ son 7 y -7 (o ± 7).

2 Resolver ecuaciones cuadráticas mediante la propiedad de la raíz cuadrada

En general, para cualquier ecuación cuadrática de la forma $x^2 = a$, podemos utilizar la **propiedad de la raíz cuadrada** para obtener la solución.

Propiedad de la raíz cuadrada

Si $x^2 = a$, entonces $x = \sqrt{a}$ o $x = -\sqrt{a}$ (abreviado $x = \pm \sqrt{a}$).

Por ejemplo, si $x^2 = 7$, entonces por la propiedad de la raíz cuadrada, $x = \sqrt{7}$ o $x = -\sqrt{7}$. También podemos escribir $x = \pm \sqrt{7}$.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $x^2 - 25 = 0$.

Solución

Antes de utilizar la propiedad de la raíz cuadrada, debemos aislar la variable que está al cuadrado. Sume 25 en ambos lados de la ecuación para dejar sola la variable en un lado de la ecuación.

$$x^2 = 25$$

Ahora utilice la propiedad de la raíz cuadrada para aislar la variable.

$$x = \pm \sqrt{25}$$

$$x = \pm 5$$

Compruebe en la ecuación original.

Comprobación

$$x = 5$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$5^2 - 25 \stackrel{?}{=} 0$$

$$25 - 25 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Verdadero.}$$

$$x = -5$$

$$x^2 - 25 = 0$$

$$(-5)^2 - 25 \stackrel{?}{=} 0$$

$$25 - 25 \stackrel{?}{=} 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Verdadero.}$$



AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 7

EJEMPLO 2

Resuelva la ecuación $x^2 + 8 = 89$.

Solución

Inicie restando 8 en ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 8 = 89$$

$$x^2 = 81$$

Despejar x^2 .

$$x = \pm\sqrt{81}$$

Propiedad de la raíz cuadrada.

$$x = \pm 9$$



EJEMPLO 3

Resuelva la ecuación $a^2 - 7 = 0$.

Solución

$$a^2 - 7 = 0$$

$$a^2 = 7$$

Despejar a^2 .

$$a = \pm\sqrt{7}$$

Propiedad de la raíz cuadrada.



AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 15

EJEMPLO 4

Resuelva la ecuación $(x - 3)^2 = 4$.

Solución

Inicie empleando la propiedad de la raíz cuadrada.

$$(x - 3)^2 = 4$$

$$x - 3 = \pm\sqrt{4}$$

Propiedad de la raíz cuadrada.

$$x - 3 = \pm 2$$

$$x - 3 + 3 = \pm 2 + 3$$

Sumar 3 en ambos lados.

$$x = 3 \pm 2$$

$$x = 3 + 2 \quad \text{o bien} \quad x = 3 - 2$$

$$x = 5$$

$$x = 1$$

Las soluciones son 1 y 5.



EJEMPLO 5

Resuelva la ecuación $(5x + 1)^2 - 2 = 16$.

Solución

Primero debemos aislar el término cuadrático. Para hacerlo sumamos 2 en ambos lados de la ecuación.

$$(5x + 1)^2 - 2 = 16$$

$$(5x + 1)^2 = 18$$

*Sumar 2 en ambos lados para
aislar el término cuadrático.*

$$5x + 1 = \pm\sqrt{18}$$

Propiedad de la raíz cuadrada.

$$5x + 1 = \pm\sqrt{9}\sqrt{2}$$

Simplificar $\sqrt{18}$.

$$5x + 1 = \pm 3\sqrt{2}$$

$$5x + 1 - 1 = \pm 3\sqrt{2} - 1$$

Restar 1 en ambos lados.

$$5x = -1 \pm 3\sqrt{2}$$

$$x = \frac{-1 \pm 3\sqrt{2}}{5}$$

Dividir ambos lados entre 5.

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 23

Las soluciones son $\frac{-1 + 3\sqrt{2}}{5}$ y $\frac{-1 - 3\sqrt{2}}{5}$.



Ahora veamos una de las muchas aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas.

EJEMPLO 6 Creación de anuncios Al crear anuncios, deben considerarse la forma de éste, así como su colorido y estilo de impresión. Cuando Antoinette LeMans visitó una compañía de publicidad para diseñar un anuncio de revista para su compañía, ella aprendió que una de las formas más atractivas es un rectángulo cuya longitud es alrededor de 1.62 veces su ancho. Cualquier rectángulo con estas proporciones se denomina *rectángulo dorado* (*áureo*). Ella decidió que el anuncio tendría las dimensiones de un rectángulo dorado. Determine las dimensiones del anuncio si tiene un área de 20 pulgadas cuadradas; vea la figura 10.1.



FIGURA 10.1

Solución

Entender y traducir

Sea x = ancho del rectángulo,
y $1.62x$ = largo del rectángulo

$$\text{área} = \text{largo} \cdot \text{ancho}$$

$$20 = (1.62x)x$$

$$20 = 1.62x^2$$

$$\text{o bien } 1.62x^2 = 20$$

$$x^2 = \frac{20}{1.62} \approx 12.3$$

$$x \approx \pm \sqrt{12.3} \approx \pm 3.51 \text{ pulgadas}$$

Revisar y responder Como el ancho no puede ser negativo, el ancho, x , es aproximadamente 3.51 pulgadas. La longitud es de alrededor de $1.62(3.51) = 5.69$ pulgadas.

Comprobación

$$\text{área} = \text{largo} \cdot \text{ancho}$$

$$20 \stackrel{?}{=} (5.69)(3.51)$$

$$20 \approx 19.97$$

Verdadero. (Hay un pequeño error de redondeo debido a que las respuestas en decimales son redondeadas.)

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 57**

Observe que la respuesta no es un número entero. Éste es el caso en muchas situaciones de la vida real. No debe sentirse incómodo cuando esto ocurra.

Conjunto de ejercicios 10.1

Ejercicios conceptuales

1. Enuncie la propiedad de la raíz cuadrada.
2. Explique cómo resolver, mediante la propiedad de la raíz cuadrada, la ecuación cuadrática $x^2 = 13$.
3. ¿Cuál es la relación entre el largo y el ancho de cualquier rectángulo dorado?
4. Si un rectángulo dorado tiene un ancho de 7 centímetros, ¿cuánto mide su largo?
5. ¿Cuántas soluciones reales y diferentes esperaría para cada una de las siguientes ecuaciones cuadráticas? Explique.
 - a) $x^2 = 9$
 - b) $x^2 = 0$
 - c) $(x - 2)^2 = 2$
 - d) $(x - 3)^2 = -2$
6. Escriba la forma estándar de una ecuación cuadrática.

Práctica de habilidades

Resuelva.

7. $x^2 = 64$

8. $x^2 = 25$

9. $x^2 = 81$

10. $x^2 = 1$

11. $y^2 = 169$

12. $z^2 = 9$

13. $x^2 = 100$
 16. $w^2 - 24 = 0$
 19. $2w^2 = 34$
 22. $3x^2 - 4 = 8$
 25. $16x^2 - 17 = 56$
14. $a^2 = 15$
 17. $3x^2 = 12$
 20. $6n^2 = 96$
 23. $9w^2 + 5 = 20$
 26. $2x^2 + 3 = 51$
15. $x^2 - 20 = 0$
 18. $7x^2 = 7$
 21. $3z^2 + 1 = 28$
 24. $3y^2 + 8 = 36$

Resuelva.

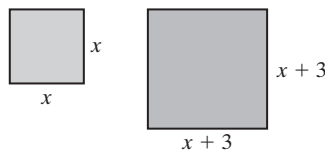
27. $(x - 4)^2 = 25$
 30. $(x + 5)^2 = 25$
 33. $(r + 6)^2 = 32$
 36. $(k - 5)^2 = 40$
 39. $(x - 9)^2 = 100$
 42. $(3a - 2)^2 = 30$
 45. $(2p - 7)^2 + 4 = 22$
28. $(y - 2)^2 = 9$
 31. $(x + 4)^2 = 64$
 34. $(x + 3)^2 = 18$
 37. $(n - 3)^2 = 49$
 40. $(x - 3)^2 = 15$
 43. $(4x + 1)^2 - 2 = 18$
 46. $(5x + 9)^2 + 9 = 49$
29. $(a + 3)^2 = 81$
 32. $(x - 4)^2 = 100$
 35. $(d + 6)^2 = 20$
 38. $(x - 11)^2 = 28$
 41. $(2x + 3)^2 = 18$
 44. $(5s - 6)^2 - 20 = 80$

Solución de problemas

47. Escriba una ecuación que tenga las soluciones 6 y -6 .
48. Escriba una ecuación que tenga las soluciones $\sqrt{7}$ y $-\sqrt{7}$.
49. Llène el área sombreada para obtener un enunciado verdadero. Explique cómo determinó su respuesta. La ecuación $x^2 - \blacksquare = 27$ tiene las soluciones 6 y -6 .
50. Llène el área sombreada para obtener un enunciado verdadero. Explique cómo determinó su respuesta. La ecuación $x^2 + \blacksquare = 45$ tiene las soluciones 8 y -8 .
51. a) Reescriba $-3x^2 + 9x - 6 = 0$ de modo que el coeficiente de x^2 sea positivo.
 b) Reescriba $-3x^2 + 9x - 6 = 0$ de modo que el coeficiente de x^2 sea 1.
52. a) Reescriba $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 = 0$ de modo que el coeficiente de x^2 sea positivo.
 b) Reescriba $-\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 = 0$ de modo que el coeficiente de x^2 sea 1.
53. **Producto de números** El producto de dos números positivos es 68. Determine los números si uno de ellos es 4.25 veces mayor que el otro.
54. **Producto de números** El producto de dos números positivos es 140. Determine los números si uno de ellos es 5.6 veces mayor que el otro.
55. **Página de un periódico** El área de una página de periódico (abierta hacia arriba) es alrededor de 631.92 pulgadas cuadradas. Determine el largo y el ancho de la página, si su largo es alrededor de 1.21 veces su ancho.
56. **Mesa de la cocina** El área de una mesa rectangular para la cocina es de 2,478 pulgadas cuadradas. Determine el largo y el ancho de la mesa, si su ancho es 0.71 veces su largo.
57. **Ampliación de un jardín** Georges Marten decidió sembrar un jardín rectangular de modo que tenga la razón de el largo y el ancho igual a la razón que se encuentra en el rectángulo de oro. Determine el largo y el ancho del jardín si tiene un área de 2,000 pies cuadrados.

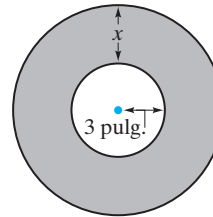


58. **Sobre de correo** La longitud de un sobre de correo con prioridad es de alrededor de 1.33 veces su ancho. Determine el largo y el ancho del sobre, si el área es aproximadamente 112 pulgadas cuadradas.
59. **Comparación de áreas** Considere los dos cuadrados con lados x y $x + 3$ que se muestran a continuación.



- a) Escriba una expresión cuadrática para el área de cada cuadrado.
- b) Si el área del cuadrado de la izquierda es 36 pulgadas cuadradas, ¿cuál es la longitud de cada lado del cuadrado?
- c) Si el área del cuadrado de la izquierda es 50 pulgadas cuadradas, ¿cuál es la longitud de cada lado del cuadrado?
- d) Si el área del cuadrado de la derecha es 81 pulgadas cuadradas, ¿cuál es la longitud de cada lado del cuadrado?
- e) Si el área del cuadrado de la derecha es 92 pulgadas cuadradas, ¿cuál es la longitud de cada lado del cuadrado?

60. **Determinar el área** Considere la siguiente figura. Si el área sombreada es aproximadamente 153.94 pulgadas cuadradas, determine x (aproximada al centésimo más cercano).



Problemas de reto

Utilice la propiedad de la raíz cuadrada para despejar la variable indicada. Suponga que todas las variables representan números positivos. Podría revisar la sección 3.1, antes de trabajar con estos problemas. Haga una lista de las raíces cuadradas positivas.

61. $A = s^2$, despeje s

62. $I = p^2r$, despeje p

63. $A = \pi r^2$, despeje r

64. $a^2 + b^2 = c^2$, despeje b

65. $I = \frac{k}{d^2}$, despeje d

66. $A = p(1 + r)^2$, despeje r

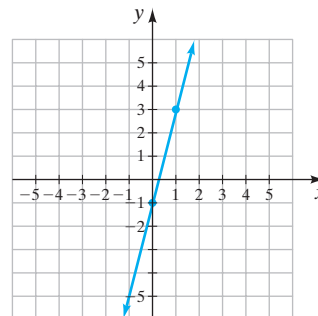
Ejercicios de repaso acumulativo

[5.4] 67. Factorice $4x^2 - 10x - 24$.

[6.5] 68. Simplifique $\frac{3 - \frac{1}{y}}{6 - \frac{1}{y}}$.

[7.4] 69. Determine la ecuación de la recta que se ilustra a la derecha.

[9.3] 70. Simplifique $\frac{\sqrt{135a^4b}}{\sqrt{3a^5b^5}}$.



10.2 SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS COMPLETANDO EL CUADRADO



- 1 Escribir trinomios cuadrados perfectos.
- 2 Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado.

Las ecuaciones cuadráticas que no pueden resolverse por factorización, pueden resolverse completando el cuadrado o con la fórmula cuadrática. En esta sección nos enfocaremos en el método de completar el cuadrado.

1 Escribir trinomios cuadrados perfectos

Un **trinomio cuadrado perfecto** es un trinomio que puede expresarse como el cuadrado de un binomio. A continuación algunos ejemplos.

Trinomio cuadrado perfecto

Factores

Cuadrado de un binomio

$x^2 + 6x + 9$	=	$(x + 3)(x + 3)$	=	$(x + 3)^2$
$x^2 - 6x + 9$	=	$(x - 3)(x - 3)$	=	$(x - 3)^2$
$x^2 + 10x + 25$	=	$(x + 5)(x + 5)$	=	$(x + 5)^2$
$x^2 - 10x + 25$	=	$(x - 5)(x - 5)$	=	$(x - 5)^2$

Observe que cada uno de los términos elevados al cuadrado en los anteriores trinomios cuadrados perfectos tiene un coeficiente numérico de 1. Cuando el coeficiente de los términos cuadráticos es 1, existe una relación importante entre el coeficiente del término en x (término lineal) y la constante. En todo trinomio cuadrado perfecto de este tipo, *el término constante es el cuadrado de la mitad del coeficiente del término lineal*.

Considere el trinomio cuadrado perfecto $x^2 + 6x + 9$. El coeficiente del término de x es 6 y la constante es 9. Observe que la constante, 9, es el cuadrado de un medio del coeficiente del término de x .

$$x^2 + 6x + 9$$

$$\left[\frac{1}{2}(6) \right]^2 = 3^2 = 9$$

Considere el trinomio cuadrado perfecto $x^2 - 10x + 25$. El coeficiente del término de x es -10 y la constante es 25. Observe que

$$x^2 - 10x + 25$$

$$\left[\frac{1}{2}(-10) \right]^2 = (-5)^2 = 25$$

Considere la expresión $x^2 + 8x + \square$. ¿Puede determinar qué número debe colocar en el área sombreada para hacer que el trinomio sea un trinomio cuadrado perfecto? Si respondió 16, lo hizo de forma correcta.

$$x^2 + 8x + \square$$

$$\left[\frac{1}{2}(8) \right]^2 = 4^2 = 16$$

El trinomio cuadrado perfecto es $x^2 + 8x + 16$. Observe que $x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$.

Examinemos los trinomios cuadrados perfectos con mayor detalle.

Trinomio cuadrado perfecto

Cuadrado de un binomio

$x^2 + 6x + 9$	=	$(x + 3)^2$
$\searrow \frac{1}{2}(6)$	=	3
$x^2 - 10x + 25$	=	$(x - 5)^2$
$\searrow \frac{1}{2}(-10)$	=	-5

Observe que cuando un trinomio cuadrado perfecto se escribe como el cuadrado de un binomio, *la constante en el binomio es un medio del valor del coeficiente del término con x en el trinomio cuadrado perfecto.*

2 Resolver ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado

El procedimiento para resolver una ecuación cuadrática por el método de **completar el cuadrado** se ilustra en el siguiente ejemplo. Algunas de las ecuaciones que resolverá en los ejemplos podrían resolverse con facilidad por medio de la factorización, pero se resolverán completando el cuadrado como un medio para ilustrar el procedimiento en problemas fáciles antes de pasar a problemas más difíciles.

EJEMPLO 1 Resuelva la ecuación $x^2 + 6x - 7 = 0$ completando el cuadrado.

Solución Primero nos aseguramos que el término cuadrático tenga un coeficiente de 1. (En el ejemplo 5 explicaremos qué hacer si el coeficiente no es 1.) Ahora necesitamos dejar los términos que tienen una variable en un lado de la ecuación. Por tanto, sumamos 7 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned}x^2 + 6x - 7 &= 0 \\x^2 + 6x &= 7\end{aligned}$$

Ahora determinamos el valor de la mitad del coeficiente numérico del término con x . En este ejemplo, el término en x es $6x$.

$$\frac{1}{2}(6) = 3$$

Elevamos al cuadrado este número,

$$(3)^2 = (3)(3) = 9$$

y luego sumamos este producto en ambos lados de la ecuación.

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$$

o bien

$$x^2 + 6x + 9 = 16$$

Al seguir este procedimiento, producimos un trinomio cuadrado perfecto en el lado izquierdo de la ecuación. La expresión $x^2 + 6x + 9$ es un trinomio cuadrado perfecto que puede expresarse como $(x + 3)^2$. Por tanto,

$$x^2 + 6x + 9 = 16$$

puede escribirse como $(x + 3)^2 = 16$

Ahora utilizamos la propiedad de la raíz cuadrada,

$$\begin{aligned}x + 3 &= \pm\sqrt{16} \\x + 3 &= \pm 4\end{aligned}$$

Por último, despejamos x , restando 3 en ambos lados de la ecuación.

$$\begin{aligned}x + 3 - 3 &= -3 \pm 4 \\x &= -3 \pm 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x &= -3 + 4 & \text{o bien} & & x &= -3 - 4 \\x &= 1 & & & x &= -7\end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones son 1 y -7 . Comprobamos ambas soluciones en la ecuación original.

Comprobación $x = 1$ $x^2 + 6x - 7 = 0$ $(1)^2 + 6(1) - 7 \stackrel{?}{=} 0$ $1 + 6 - 7 \stackrel{?}{=} 0$ $0 = 0 \text{ Verdadero.}$	$x = -7$ $x^2 + 6x - 7 = 0$ $(-7)^2 + 6(-7) - 7 \stackrel{?}{=} 0$ $49 - 42 - 7 \stackrel{?}{=} 0$ $0 = 0 \text{ Verdadero.} \quad \star$
---	---

Ahora resumimos el procedimiento.

Para resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado

1. Si es necesario, utilice la propiedad de igualdad de la multiplicación (o división) a fin de hacer que el coeficiente numérico del término cuadrático sea igual a 1.
2. Reescriba la ecuación con la constante sola en el lado derecho de la ecuación.
3. Tome un medio del coeficiente numérico del término de primer grado, elévelo al cuadrado, y sume esta cantidad en ambos lados de la ecuación.
4. Reemplace el trinomio con su binomio elevado al cuadrado equivalente.
5. Utilice la propiedad de la raíz cuadrada.
6. Despeje la variable.
7. Compruebe sus respuestas en la ecuación *original*.

EJEMPLO 2 Resuelva la ecuación $x^2 - 10x + 21 = 0$ completando el cuadrado.

Solución

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

$$x^2 - 10x = -21 \quad \text{Paso 2.}$$

Tome un medio del coeficiente numérico del término de x , elévelo al cuadrado, y sume este producto en ambos lados de la ecuación.

$$\frac{1}{2}(-10) = -5, \quad (-5)^2 = 25$$

Ahora sume 25 en ambos lados de la ecuación.

$$x^2 - 10x + 25 = -21 + 25 \quad \text{Paso 3.}$$

$$x^2 - 10x + 25 = 4$$

o bien $(x - 5)^2 = 4 \quad \text{Paso 4.}$

$$x - 5 = \pm\sqrt{4} \quad \text{Paso 5.}$$

$$x - 5 = \pm 2$$

$$x = 5 \pm 2 \quad \text{Paso 6.}$$

$$x = 5 + 2 \quad \text{o bien} \quad x = 5 - 2$$

$$x = 7 \qquad \qquad x = 3$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 13**

Una comprobación demostrará que las soluciones son 7 y 3. ★

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $x^2 = 3x + 18$ completando el cuadrado.

Solución

Coloque todos los términos, excepto el constante, en el lado izquierdo de la ecuación.

$$x^2 = 3x + 18$$

$$x^2 - 3x = 18 \quad \text{Paso 2.}$$

Tome un medio del coeficiente numérico del término con x , elévelo al cuadrado y sume este producto en ambos lados de la ecuación.

$$\frac{1}{2}(-3) = -\frac{3}{2}, \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 18 + \frac{9}{4} \quad \text{Paso 3.}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = 18 + \frac{9}{4} \quad \text{Paso 4.}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{72}{4} + \frac{9}{4}$$

$$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\sqrt{\frac{81}{4}} \quad \text{Paso 5.}$$

$$x - \frac{3}{2} = \pm\frac{9}{2}$$

$$x = \frac{3}{2} \pm \frac{9}{2} \quad \text{Paso 6.}$$

$$x = \frac{3}{2} + \frac{9}{2} \quad \text{o bien} \quad x = \frac{3}{2} - \frac{9}{2}$$

$$x = \frac{12}{2} = 6 \quad x = -\frac{6}{2} = -3$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 21**

Las soluciones son 6 y -3 .



En los siguientes ejemplos no mostraremos algunos de los pasos intermedios.

EJEMPLO 4 Solución

Resuelva la ecuación $x^2 - 16x + 4 = 0$ completando el cuadrado.

$$x^2 - 16x + 4 = 0$$

$$x^2 - 16x = -4 \quad \text{Paso 2.}$$

$$x^2 - 16x + 64 = -4 + 64 \quad \text{Paso 3.}$$

$$(x - 8)^2 = 60 \quad \text{Paso 4.}$$

$$x - 8 = \pm\sqrt{60} \quad \text{Paso 5.}$$

$$x - 8 = \pm\sqrt{4} \sqrt{15}$$

$$x - 8 = \pm 2\sqrt{15}$$

$$x = 8 \pm 2\sqrt{15} \quad \text{Paso 6.}$$

Las soluciones son $8 + 2\sqrt{15}$ y $8 - 2\sqrt{15}$.



EJEMPLO 5 Solución

Resuelva la ecuación $5z^2 - 25z + 10 = 0$ completando el cuadrado.

Para resolver una ecuación completando el cuadrado, el coeficiente numérico del término cuadrático debe ser 1. Como el coeficiente de éste es 5, multiplicamos ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{5}$ (o dividimos todos los términos entre 5) para hacer que el coeficiente sea igual a 1.

$$5z^2 - 25z + 10 = 0$$

$$\frac{1}{5}(5z^2 - 25z + 10) = \frac{1}{5}(0) \quad \text{Paso 1.}$$

$$z^2 - 5z + 2 = 0$$

Ahora procedemos como en los ejemplos anteriores.

$$z^2 - 5z = -2 \quad \text{Paso 2.}$$

$$z^2 - 5z + \frac{25}{4} = -2 + \frac{25}{4} \quad \text{Paso 3.}$$

$$\left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = -\frac{8}{4} + \frac{25}{4} \quad \text{Paso 4.}$$

$$\left(z - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{17}{4}$$

$$z - \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{17}{4}} \quad \text{Paso 5.}$$

$$z - \frac{5}{2} = \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$z = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{Paso 6.}$$

$$z = \frac{5}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} \quad \text{o bien} \quad z = \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$z = \frac{5 + \sqrt{17}}{2} \quad z = \frac{5 - \sqrt{17}}{2}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 33**

Las soluciones son $\frac{5 + \sqrt{17}}{2}$ y $\frac{5 - \sqrt{17}}{2}$.



Conjunto de ejercicios 10.2

Ejercicios conceptuales

1. a) ¿Qué es un trinomio cuadrado perfecto?
b) Llene el área sombreada para obtener un trinomio cuadrado perfecto y explique cómo determinó su respuesta.
$$x^2 + 8x \quad \square$$
2. Llene el área sombreada para obtener un trinomio cuadrado perfecto, y explique cómo determinó su respuesta.
$$x^2 - 10x \quad \square$$
3. En un trinomio cuadrado perfecto, ¿qué relación existe entre la constante y el coeficiente del término con x ?
4. En un trinomio cuadrado perfecto, si el coeficiente del término con x es 4, ¿cuál es la constante?
5. En un trinomio cuadrado perfecto, si el coeficiente del término con x es -12 , ¿cuál es la constante?
6. a) Explique cómo resolver una ecuación cuadrática completando el cuadrado.
b) Compare su respuesta en el inciso a) con el procedimiento dado en la página 623. ¿Omitió algún paso en su explicación?

Práctica de habilidades

Resuelva completando el cuadrado.

7. $x^2 - 7x + 10 = 0$

10. $r^2 + r - 30 = 0$

13. $z^2 - 2z - 8 = 0$

16. $k^2 = -9k - 18$

19. $x^2 + 10x + 24 = 0$

22. $x^2 = 3x + 28$

8. $x^2 + 5x + 6 = 0$

11. $x^2 + 3x + 2 = 0$

14. $m^2 - 9m + 14 = 0$

17. $x^2 = 2x + 15$

20. $-35 = n^2 - 12n$

23. $-32 = -p^2 + 4p$

9. $x^2 - 8x + 7 = 0$

12. $x^2 + 4x - 32 = 0$

15. $n^2 = -6n - 9$

18. $x^2 = -5x - 6$

21. $x^2 = 15x - 56$

24. $-x^2 - 3x + 40 = 0$

25. $z^2 - 4z = -2$

28. $g^2 - 2g = 4$

31. $2x^2 + 4x - 6 = 0$

34. $2x^2 = 8x + 90$

37. $3x^2 - 11x - 4 = 0$

40. $2x^2 - x = 5$

43. $2x^2 = 12x$

26. $z^2 + 2z = 6$

29. $m^2 + 7m + 2 = 0$

32. $2x^2 + 2x - 24 = 0$

35. $3h^2 - 15h = 18$

38. $3x^2 - 8x + 4 = 0$

41. $x^2 - 5x = 0$

44. $3x^2 = 9x$

27. $6w + 4 = -w^2$

30. $x^2 + 3x - 6 = 0$

33. $2x^2 + 18x + 4 = 0$

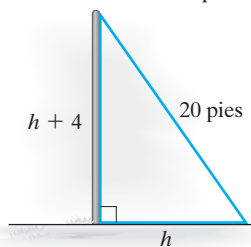
36. $4x^2 = -28x + 32$

39. $9t^2 + 6t = 6$

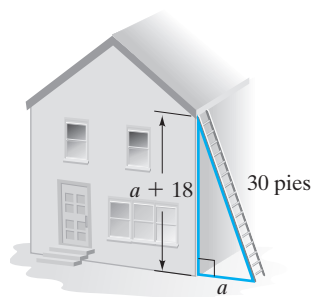
42. $2x^2 - 6x = 0$

Resolución de problemas

45. a) Escriba un trinomio cuadrado perfecto que tenga un término de $20x$.
b) Explique cómo construyó su trinomio cuadrado perfecto.
46. a) Escriba un trinomio cuadrado perfecto que tenga un término de $-14x$.
b) Explique cómo construyó su trinomio cuadrado perfecto.
47. **Números** Cuando el triple de un número se suma a su cuadrado, la suma es 4. Determine el o los números.
48. **Números** Cuando el quíntuplo de un número se resta del doble de su cuadrado, la diferencia es 12. Determine el o los números.
49. **Números** Si el cuadrado de la suma de un número más 3 es 9, determine el o los números.
50. **Números** Si el cuadrado de la diferencia de un entero menos 2 es 16, determine el o los números.
51. **Números** El producto de dos números positivos es 21. Determine los dos números, si uno es 4 unidades mayor que el otro.
52. **Sujeción de un poste** Un alambre de tensión de 20 pies de longitud está sujetando un poste, como se muestra en la figura. Determine la altura del poste.



53. **Escalera apoyada sobre una casa** Una escalera de 30 pies descansa contra una casa, como se muestra. Determine la distancia vertical desde el piso a donde la escalera descansa en la casa.



54. **Suma de enteros** La suma s , de los primeros n enteros, puede determinarse por medio de la fórmula $s = \frac{n^2 + n}{2}$. Determine el valor de n si la suma es 28.
55. **Altura de un objeto** Cuando se lanza un objeto directamente hacia arriba desde la Tierra con velocidad inicial de 128 pies por segundo, su altura del suelo, s , en pies al cabo de t segundos está dada por medio de la fórmula $s = -16t^2 + 128t$. ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en alcanzar una altura de 192 pies? (Por tanto, $s = 192$).
56. **Altura de un objeto** Repita el ejercicio 55 para una altura de 112 pies.

Problemas de reto

57. Llene el área sombreada para obtener un trinomio cuadrado perfecto y explique cómo determinó su respuesta.
 x^2 $+ 196$
58. Llene el área sombreada para obtener un trinomio cuadrado perfecto y explique cómo determinó su respuesta.
 x^2 $+ \frac{9}{100}$
59. a) Resuelva la ecuación $x^2 - 14x - 1 = 0$ completando el cuadrado.
b) Compruebe su solución (no será un número racional) sustituyendo el valor o valores que obtuvo en el inciso a) por cada x en la ecuación en el inciso a).
60. a) Resuelva la ecuación $x^2 + 3x - 7 = 0$ completando el cuadrado.
b) Compruebe su solución (no será un número racional) sustituyendo el valor o valores que obtuvo en el inciso a) por x en la ecuación del inciso a).

Resuelva completando el cuadrado.

61. $x^2 + \frac{3}{5}x - \frac{1}{2} = 0$.

62. $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{1}{5} = 0$.

63. $3x^2 + \frac{1}{2}x = 4$.

64. $0.1x^2 + 0.2x - 0.54 = 0$

65. $-5.26x^2 + 7.89x + 15.78 = 0$

Ejercicios de repaso acumulativo

[6.4] 66. Simplifique $\frac{x^2}{x^2 - x - 6} - \frac{x - 2}{x - 3}$.

[7.4] 67. Explique cómo determinar si dos ecuaciones representan rectas paralelas sin graficar las ecuaciones.

[8.2, 8.3] 68. Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones.

$$3x - 4y = 6$$

$$2x + y = 8$$

[9.5] 69. Resuelva la ecuación $\sqrt{2x + 3} = 2x - 3$.

10.3 SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS POR MEDIO DE LA FÓRMULA CUADRÁTICA (FÓRMULA GENERAL)



- 1 Resolver ecuaciones cuadráticas por la fórmula cuadrática.
- 2 Determinar el número de soluciones para una ecuación cuadrática utilizando el discriminante.

1 Resolver ecuaciones cuadráticas por la fórmula cuadrática

Otro método que puede usarse para resolver cualquier ecuación cuadrática es la **fórmula cuadrática (o fórmula general)**. Es el método más útil y versátil para resolver ecuaciones cuadráticas.

La forma estándar de una ecuación cuadrática es $ax^2 + bx + c = 0$, donde a es el coeficiente del término cuadrático, b es el coeficiente del término de primer grado y c es la constante.

Ecuación cuadrática en forma estándar

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$5x^2 + 3x = 0$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + 5 = 0$$

Valores de a , b y c

$$a = 1, \quad b = -5, \quad c = 6$$

$$a = 5, \quad b = 3, \quad c = 0$$

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = 0, \quad c = 5$$

Podemos deducir la fórmula cuadrática iniciando con una ecuación cuadrática en forma estándar y completando el cuadrado, como se estudió en la sección precedente.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Forma estándar de la ecuación cuadrática.

Dividir ambos lados entre a .

Restar c/a en ambos lados.

Tomar $1/2$ de b/a ; esto es, $b/(2a)$ y elevarlo al cuadrado para obtener $b^2/(4a^2)$. Luego sumar esta expresión en ambos lados.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}$$

Reescribir el lado izquierdo de la ecuación como el cuadrado de un binomio.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Escribir el lado derecho con un denominador común.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$

Propiedad de la raíz cuadrada.

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Regla del cociente para radicales, $\sqrt{4a^2} = 2a$.

$$x = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Restar $b/(2a)$ en ambos lados.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Escribir con un denominador común para obtener la fórmula cuadrática.

Para resolver una ecuación cuadrática por medio de la fórmula cuadrática

1. Escriba la ecuación en la forma estándar, $ax^2 + bx + c = 0$, y determine los valores numéricos para a , b y c .
2. Sustituya los valores para a , b y c del paso 1 en la fórmula cuadrática y luego evalúe para obtener la solución.

Fórmula cuadrática

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EJEMPLO 1 Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $x^2 + 4x + 3 = 0$.

Solución En esta ecuación $a = 1$, $b = 4$ y $c = 3$. Sustituya estos valores en la fórmula cuadrática y luego evalúe.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(4) \pm \sqrt{(4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{-4 \pm 2}{2} \\ x &= \frac{-4 + 2}{2} \quad \text{o bien} \quad x = \frac{-4 - 2}{2} \\ &= \frac{-2}{2} = -1 \quad \quad \quad = \frac{-6}{2} = -3 \end{aligned}$$

Comprobación

$x = -1$

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x + 3 &= 0 \\
 (-1)^2 + 4(-1) + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 1 - 4 + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 0 &= 0 \quad \text{Verdadero}
 \end{aligned}$$

$x = -3$

$$\begin{aligned}
 x^2 + 4x + 3 &= 0 \\
 (-3)^2 + 4(-3) + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 9 - 12 + 3 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 0 &= 0 \quad \text{Verdadero} \quad \star
 \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 29CÓMO EVITAR
ERRORES COMUNES**Todo el numerador** de la fórmula cuadrática debe dividirse entre $2a$.

CORRECTO

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

INCORRECTO

$$\begin{aligned}
 x &= -b \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 x &= \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{b^2 - 4ac}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 2 Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $8x^2 + 2x + 1 = 0$.

Solución

$$\begin{aligned}
 8x^2 + 2x - 1 &= 0 \\
 a &= 8, \quad b = 2, \quad c = -1 \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(8)(-1)}}{2(8)} \\
 &= \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{16} \\
 &= \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{16} \\
 &= \frac{-2 \pm 6}{16}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-2 + 6}{16} \quad \text{o bien} \quad x = \frac{-2 - 6}{16} \\
 &= \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \qquad \qquad \qquad = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

Comprobación

$x = \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
 8x^2 + 2x - 1 &= 0 \\
 8\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{4}\right) - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 8\left(\frac{1}{16}\right) + \frac{1}{2} - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 0 &= 0 \quad \text{Verdadero.}
 \end{aligned}$$

$x = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}
 8x^2 + 2x - 1 &= 0 \\
 8\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 8\left(\frac{1}{4}\right) - 1 - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 2 - 1 - 1 &\stackrel{?}{=} 0 \\
 0 &= 0 \quad \text{Verdadero.} \quad \star
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3 Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $2w^2 + 6w - 5 = 0$.

Solución La variable en esta ecuación es w . El procedimiento para resolver la ecuación es el mismo.

$$\begin{aligned}
 a &= 2, \quad b = 6, \quad c = -5 \\
 w &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(2)(-5)}}{2(2)} \\
 &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 40}}{4} \\
 &= \frac{-6 \pm \sqrt{76}}{4} \\
 &= \frac{-6 \pm \sqrt{4} \sqrt{19}}{4} \\
 &= \frac{-6 \pm 2\sqrt{19}}{4}
 \end{aligned}$$

Ahora factorice 2 de ambos términos en el numerador; luego divida entre los factores comunes, como se explicó en la sección 9.4.

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{\frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{19})}{\frac{4}{2}} \\
 w &= \frac{-3 \pm \sqrt{19}}{2}
 \end{aligned}$$

Por tanto, las soluciones son $w = \frac{-3 + \sqrt{19}}{2}$ y $w = \frac{-3 - \sqrt{19}}{2}$.



Ahora resolveremos dos ejemplos en donde la ecuación no está en forma estándar.

EJEMPLO 4 Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $x^2 = 6x - 4$.

Solución Primero escriba la ecuación en forma estándar.

$$\begin{aligned}
 x^2 - 6x + 4 &= 0 && \text{Hacer que uno de los lados de la ecuación sea igual a cero.} \\
 a = 1, \quad b = -6, \quad c &= 4 \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} && \text{Sustituir.} \\
 &= \frac{6 \pm \sqrt{36 - 16}}{2} && \text{Simplificar.} \\
 &= \frac{6 \pm \sqrt{20}}{2} \\
 &= \frac{6 \pm \sqrt{4} \sqrt{5}}{2} && \text{Regla del producto.}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{6 \pm 2\sqrt{5}}{2} \\
 &= \frac{\overset{1}{\cancel{2}}(3 \pm \sqrt{5})}{\underset{1}{\cancel{2}}}
 \end{aligned}$$

Factorizar y cancelar el 2.

$$= 3 \pm \sqrt{5}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 41

Las soluciones son $x = 3 + \sqrt{5}$ y $x = 3 - \sqrt{5}$.



CÓMO EVITAR ERRORES COMUNES

Muchos estudiantes resuelven las ecuaciones cuadráticas de forma correcta hasta el último paso, cuando cometen un error. No cometa el error de tratar de simplificar una respuesta que no puede simplificarse más. Las siguientes son respuestas que no pueden simplificarse, y algunos errores comunes.

Respuestas que no
pueden simplificarse

$$\frac{3 + 2\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{4 + 3\sqrt{5}}{2}$$

INCORRECTO

$$\begin{aligned}
 \frac{3 + 2\sqrt{5}}{2} &= \frac{3 + \overset{1}{\cancel{2}}\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{2}}} = 3 + \sqrt{5} \\
 \frac{\overset{2}{\cancel{4}} + 3\sqrt{5}}{\underset{1}{\cancel{2}}} &= 2 + 3\sqrt{5}
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 5

Utilice la fórmula cuadrática para resolver la ecuación $t^2 = 25$.

Solución

Primero escriba la ecuación en la forma estándar.

$$t^2 - 25 = 0$$

Hacer que uno de los lados
de la ecuación sea igual a 0.

$$a = 1, \quad b = 0, \quad c = -25$$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(-25)}}{2(1)}$$

Sustituir.

$$= \frac{\pm \sqrt{100}}{2} = \frac{\pm 10}{2} = \pm 5$$

Simplificar y despejar t .

Por tanto, las soluciones son 5 y -5 .



Pudimos obtener la solución del ejemplo 5 con mayor rapidez empleando la propiedad de la raíz cuadrada analizada en la sección 10.1. Resolvimos el ejemplo 5 mediante la fórmula cuadrática para darle más práctica utilizando la fórmula.

El siguiente ejemplo ilustra una ecuación cuadrática que no tiene solución en los números reales.

EJEMPLO 6

Resuelva la ecuación cuadrática $3x^2 = x - 1$.

Solución

$$3x^2 - x + 1 = 0$$

$$a = 3, \quad b = -1, \quad c = 1$$

$$\begin{aligned}x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)} \\&= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 12}}{6} \\&= \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{6}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 47

Como $\sqrt{-11}$ no es un número real, nos detenemos aquí. Esta ecuación no tiene solución en los números reales. *Cuando le dan un problema de este tipo, su respuesta debe ser “no hay solución en los números reales”. No deje la respuesta en blanco, y no escriba 0 como respuesta.* Estudiaremos números como $\sqrt{-11}$ y $(1 \pm \sqrt{-11})/6$ en la sección 10.5, cuando estudiemos un sistema de números que incluye números de este tipo. 

2 Determinar el número de soluciones para una ecuación cuadrática utilizando el discriminante

La expresión dentro del signo de raíz cuadrada, en la fórmula cuadrática, se denomina **discriminante**.

$$\underbrace{b^2 - 4ac}_{\text{Discriminante.}}$$

El discriminante puede utilizarse para determinar el número de soluciones reales para una ecuación cuadrática.

Cuando el discriminante es:

- 1. Mayor que cero, $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene **dos soluciones reales y distintas**.
- 2. Igual a cero, $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene **una solución real**.
- 3. Menor que cero, $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática **no tiene soluciones reales**.

Mostramos esta información en forma condensada en el siguiente cuadro.

$b^2 - 4ac$	Número de soluciones
Positivo	Dos raíces reales y distintas
0	Una solución real
Negativo	Ninguna solución real

EJEMPLO 7

- a) Determine el discriminante de la ecuación $x^2 - 12x + 36 = 0$.
- b) Utilice el discriminante para determinar el número de soluciones de la ecuación.
- c) Utilice la fórmula cuadrática para determinar las soluciones, si éstas existen.

Solución a) $a = 1$, $b = -12$, $c = 36$

$$b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4(1)(36) = 144 - 144 = 0$$

b) Como el discriminante es igual a cero, hay una solución real.

$$\begin{aligned} \text{c) } x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2(1)} \\ &= \frac{12 \pm 0}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 9**La única solución es 6. **EJEMPLO 8** Sin encontrar las raíces, determine si las ecuaciones siguientes tienen dos soluciones reales y distintas, una solución real o ninguna solución real.

$$\text{a) } 4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \text{b) } 2x^2 + 13x = -15 \quad \text{c) } 6p^2 = -5p - 2$$

Solución Utilizamos el discriminante de la fórmula cuadrática para responder estas preguntas.

$$\text{a) } b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4(4)(1) = 16 - 16 = 0$$

Como el discriminante es igual a cero, esta ecuación tiene una solución real.

b) Primero, reescriba $2x^2 + 13x = -15$ como $2x^2 + 13x + 15 = 0$.

$$b^2 - 4ac = (13)^2 - 4(2)(15) = 169 - 120 = 49$$

Como el discriminante es positivo, esta ecuación tiene dos soluciones reales y distintas.

c) Primero reescriba $6p^2 = -5p - 2$ como $6p^2 + 5p + 2 = 0$

$$b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(6)(2) = 25 - 48 = -23$$

Como el discriminante es negativo, esta ecuación no tiene soluciones reales. 

Ahora veamos una de las muchas aplicaciones que pueden resolverse mediante la fórmula cuadrática.

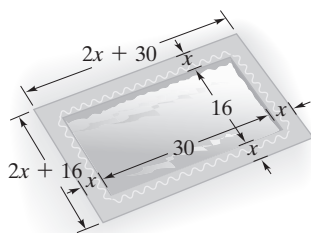
EJEMPLO 9 Construcción de una barda Los Johnsons tienen una alberca rectangular que mide 30 pies por 16 pies. Quieren agregar una barda de cemento de ancho uniforme alrededor de la piscina. ¿De cuánto puede ser el ancho del borde si quieren que el área de éste sea de 200 pies cuadrados?

FIGURA 10.2

Solución Hagamos un diagrama de la alberca; vea la figura 10.2. Sea x = ancho uniforme del borde. Entonces el largo total de la alberca y el borde es $2x + 30$. El ancho total de la alberca y el borde es $2x + 16$. El área del borde puede determinarse restando el área de la alberca (el área del rectángulo más pequeño) del área de la alberca y el borde (el área del rectángulo mayor).

$$\text{área de la alberca} = l \cdot a = (30)(16) = 480$$

$$\begin{aligned} \text{área de la alberca y el borde} &= l \cdot a = (2x + 30)(2x + 16) \\ &= 4x^2 + 92x + 480 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{área del borde} &= \text{área de la alberca y el borde} - \text{área de la alberca} \\
 &= (4x^2 + 92x + 480) - 480 \\
 &= 4x^2 + 92x
 \end{aligned}$$

El área total del borde es 200 pies cuadrados. Por tanto,

$$\begin{aligned}
 \text{área del borde} &= 4x^2 + 92x \\
 200 &= 4x^2 + 92x \\
 \text{o bien } 4x^2 + 92x - 200 &= 0 && \text{Escribir la ecuación en la forma estándar.} \\
 4(x^2 + 23x - 50) &= 0 && \text{Factorizar el 4.} \\
 \frac{1}{4} \cdot 4(x^2 + 23x - 50) &= \frac{1}{4} \cdot 0 && \text{Multiplicar ambos lados por } \frac{1}{4} \text{ para} \\
 &&& \text{eliminar el 4.} \\
 x^2 + 23x - 50 &= 0
 \end{aligned}$$

Ahora utilizamos la fórmula cuadrática.

$$\begin{aligned}
 a &= 1 & b &= 23 & c &= -50 \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-23 \pm \sqrt{(23)^2 - 4(1)(-50)}}{2(1)} \\
 &= \frac{-23 \pm \sqrt{529 + 200}}{2} \\
 &= \frac{-23 \pm \sqrt{729}}{2} \\
 &= \frac{-23 \pm 27}{2} \\
 x &= \frac{-23 - 27}{2} & \text{o bien } x &= \frac{-23 + 27}{2} \\
 &= \frac{-50}{2} & &= \frac{4}{2} \\
 &= -25 & &= 2
 \end{aligned}$$

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 63**

Como las longitudes son positivas, la única solución posible es $x = 2$. Por tanto, el ancho uniforme de cemento será de 2 pies alrededor de la alberca. 

En el ejemplo 9, la respuesta fue un valor entero. Sin embargo, muchas veces al trabajar con problemas de aplicación la respuesta será un número irracional. Cuando esto ocurra en el conjunto de ejercicios redondearemos los valores de los radicales a dos decimales para determinar la respuesta.

SUGERENCIA

Observe en el ejemplo 9 que cuando teníamos la ecuación cuadrática $4x^2 + 92x - 200 = 0$, factorizamos el factor común, 4, para obtener

$$4x^2 + 92x - 200 = 0$$

$$4(x^2 + 23x - 50) = 0$$

Luego multiplicamos ambos lados de la ecuación por $\frac{1}{4}$ y utilizamos la ecuación cuadrática, $x^2 + 23x - 50 = 0$, donde $a = 1$, $b = 23$ y $c = -50$, en la fórmula cuadrática. Si todos los términos en una ecuación cuadrática tienen un factor común, será más sencillo factorizarlo primero, para que tenga coeficientes más pequeños cuando utilizemos la fórmula cuadrática. Consideremos la ecuación cuadrática $4x^2 + 8x - 12 = 0$.

En esta ecuación $a = 4$, $b = 8$ y $c = -12$. Si resuelve esta ecuación con la fórmula cuadrática, después de simplificar obtendrá las soluciones -3 y 1 . Intente esto y véalo. Si factoriza el 4 para obtener

$$4x^2 + 8x - 12 = 0$$

$$4(x^2 + 2x - 3) = 0$$

y luego utiliza la fórmula cuadrática con la ecuación $x^2 + 2x - 3 = 0$, donde $a = 1$, $b = 2$ y $c = -3$, obtiene la misma solución. Hágalo y vea.

Matemáticas en acción**Diseño de jardines (Antes y ahora)**

Hacer los cálculos para un jardín o el borde de una alberca, caen dentro del campo de un diseñador de jardines. En el mismo terreno residencial, el diseñador también planeará senderos, distribución de espacios para árboles y arbustos y, si aún no se construye una casa, consultará con los arquitectos y el constructor.



En días pasados, el trabajo de diseño era realizado con lápiz y papel (o los equivalentes antes de que existiesen el lápiz y el papel) y con la construcción de modelos físicos. Además de extensivos bosquejos y dibujos, el diseñador tenía que estar preparado para calcular en forma manual todos los gastos, los mate-

riales necesarios y las horas de mano de obra para volver una imagen en cosas reales, flores, césped, árboles, paredes, etcétera. Uno escucha de complejas fórmulas matemáticas para determinar si un diseño está “balanceado” o no.

Ahora las matemáticas del diseño han sido capturadas en programas de cómputo que permiten al diseñador, profesional y otros, trabajar con modelos visuales en 2 y 3 dimensiones. Utilizando estos modelos, el diseñador puede elegir de entre cientos de plantas y árboles y colocarlos en un espacio y seleccionar materiales como mármol, piedra y madera para ver su apariencia. Estos programas también permiten al diseñador cambiar el tamaño, forma, bordes y ubicación de cualquier elemento y, por último, estimar el costo de los materiales necesarios para un diseño dado.

Además de las fórmulas geométricas necesarias, utilizan muchas ecuaciones más para escribir programas de cómputo que proporcionan la flexibilidad para el diseñador, a fin de mover cosas en la pantalla de la computadora para ver diferentes diseños. Aunque con frecuencia no nos damos tiempo para considerar qué hace una función de un programa de cómputo, siempre es lo mismo, las ecuaciones matemáticas; y le toca a la gente que entiende las matemáticas subyacentes escribir esos programas de cómputo.

Conjunto de ejercicios 10.3

Ejercicios conceptuales

1. a) ¿Qué es el discriminante?
b) Explique cómo puede utilizarse el discriminante para determinar el número de soluciones reales que tiene una ecuación cuadrática.
2. ¿Cuántas soluciones reales tienen si el discriminante es igual a
a) -4 ? b) 0 ? c) $\frac{1}{2}$?
3. Sin ver sus apuntes, escriba la fórmula cuadrática. Debe memorizar esta fórmula.
4. Explique por qué una ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales cuando el discriminante es mayor que 0, una solución real cuando el discriminante es igual a 0, y ninguna solución real cuando el discriminante es menor que cero. Utilice la fórmula cuadrática en la explicación de su respuesta.
5. ¿Cuál es el primer paso al resolver una ecuación cuadrática mediante la fórmula cuadrática?
6. Un estudiante que utiliza la fórmula cuadrática para resolver $2x^2 + 5x + 1 = 0$ escribió los siguientes pasos. ¿Cuál es el error en el trabajo del estudiante?

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(2)(1)}}{2(2)} \\
 &= -5 \pm \frac{\sqrt{25 - 8}}{4} \\
 &= -5 \pm \frac{\sqrt{17}}{4}
 \end{aligned}$$

7. Un estudiante que utiliza la fórmula cuadrática para resolver $x^2 = 4x + 7$ escribió los siguientes pasos. ¿Cuál es el error en el trabajo del estudiante?

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(7)}}{2(1)} \\
 &= \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} \\
 &= \frac{-4 \pm \sqrt{-12}}{2}
 \end{aligned}$$

8. Un estudiante que utiliza la fórmula cuadrática para resolver $x^2 + 4 = 0$ escribió los siguientes pasos. ¿Cuál es el error en el trabajo del estudiante?

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{0 \pm \sqrt{0^2 - 4(1)(4)}}{2(1)} \\
 &= \frac{\pm \sqrt{-16}}{2} \\
 &= \frac{\pm 4}{2} \\
 &= \pm 2
 \end{aligned}$$

Práctica de habilidades

Determine si cada ecuación tiene dos raíces reales y distintas, una solución real o bien no tiene solución real.

- | | | | |
|-------------------------|-------------------------|------------------------|-----------------------|
| 9. $x^2 + 5x - 9 = 0$ | 10. $x^2 + 2x - 5 = 0$ | 11. $2x^2 + x + 1 = 0$ | 12. $r^2 + r + 3 = 0$ |
| 13. $6n^2 + 3n - 7 = 0$ | 14. $4x^2 - 24x = -36$ | 15. $2x^2 = 16x - 32$ | 16. $5x^2 - 4x = 7$ |
| 17. $2x^2 - 7x + 8 = 0$ | 18. $z^2 = 5z + 9$ | 19. $4x = 8 + x^2$ | 20. $5x - 8 = 3x^2$ |
| 21. $x^2 + 7x - 3 = 0$ | 22. $2x^2 - 6x + 9 = 0$ | 23. $3k^2 - 9 = 0$ | 24. $6x^2 - 5x = 0$ |
| 25. $9 = -t^2 + 6t$ | 26. $-25 = w^2 + 10w$ | | |

Utilice la fórmula cuadrática para resolver cada ecuación. Si la ecuación no tiene solución real, indíquelo.

- | | | |
|-------------------------|--------------------------|--------------------------|
| 27. $x^2 - 2x - 8 = 0$ | 28. $x^2 + 11x + 10 = 0$ | 29. $x^2 + 9x + 18 = 0$ |
| 30. $x^2 - 3x - 10 = 0$ | 31. $x^2 - 6x = -5$ | 32. $x^2 + 5x - 24 = 0$ |
| 33. $30 = -z^2 - 11z$ | 34. $x^2 - 49 = 0$ | 35. $m^2 = 81$ |
| 36. $x^2 - 6x = 0$ | 37. $t^2 - 5t = 0$ | 38. $z^2 - 17z + 72 = 0$ |
| 39. $2x^2 - 3x + 2 = 0$ | 40. $n^2 - 7n + 10 = 0$ | 41. $2y^2 - 7y + 4 = 0$ |

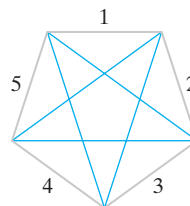
42. $15x^2 - 7x = 2$ 43. $6x^2 = -x + 1$ 44. $4r^2 + r - 3 = 0$
 45. $2x^2 = 5x + 7$ 46. $3w^2 - 4w + 5 = 0$ 47. $2s^2 - 4s + 3 = 0$
 48. $x^2 - 7x + 3 = 0$ 49. $4x^2 = x + 5$ 50. $x^2 - 3x - 1 = 0$
 51. $2x^2 - 7x = 9$ 52. $-x^2 + 2x + 15 = 0$ 53. $-2x^2 + 11x - 15 = 0$
 54. $6y^2 + 9 = -5y$ 55. $2t^2 + 4t - 30 = 0$ 56. $3r^2 - 27r + 54 = 0$
 57. $36 = -4s^2 + 40s$ 58. $20 = -5p^2 - 5p$

Solución de problemas

59. **Producto de números** El producto de dos enteros positivos consecutivos es 42. Determine los dos números.
60. **Dimensiones de un rectángulo** El largo de un rectángulo es 3 pies más grande que su ancho. Determine las dimensiones del rectángulo, si su área es 28 pies cuadrados.
61. **Dimensiones de un rectángulo** El largo de un rectángulo es 3 pies más pequeño que el doble de su ancho. Si su área es de 20 pies cuadrados, determine el largo y el ancho del rectángulo.
62. **Jardín rectangular** El jardín rectangular de Sean McDonald mide 20 pies por 30 pies. Él desea construir un pasillo de ancho uniforme con ladrillos alrededor del jardín y que cubra un área de 336 pies cuadrados. ¿Cuál será el ancho del pasillo?
63. **Alberca** Harold Goldstein y su esposa Elaine, hace poco instalaron una alberca rectangular que mide 30 pies por 40 pies. Quieren agregar un borde de ancho uniforme con mosaico decorativo alrededor de todos los lados de la alberca. Si compran suficientes mosaicos para cubrir 296 pies cuadrados, ¿cuál será el ancho del borde con mosaicos?



64. **Estudio de cerámica** Julie Bonds está planeando sembrar pasto alrededor de su estudio rectangular de cerámica; éste mide 48 pies por 36 pies. Si ella sólo tiene suficientes semillas para sembrar 4000 pies cuadrados de pasto, ¿de qué ancho uniforme debe sembrar el borde de pasto?
65. **Diagonales en un polígono** El número de diagonales, d , en un polígono con n lados está dado mediante la fórmula $d = \frac{n^2 - 3n}{2}$. Por ejemplo, un pentágono, un polígono con 5 lados, tiene $d = \frac{5^2 - 15}{2} = 5$ diagonales; vea la figura.



Si un polígono tiene 27 diagonales, ¿cuántos lados tiene?

66. **Diagonales de un polígono** Si un polígono tiene 35 diagonales, ¿cuántos lados tiene? Vea el ejercicio 65.
67. **Mecedoras** El costo, c , por fabricar x mecedoras está dado por $c = x^2 - 16x + 40$. Determine el número de mecedoras, si el costo es \$1,000.
68. **Costo de fabricación** Repita el ejercicio 67 para un costo de \$2,680.
69. **Cohetes a escala** Phil Chefetz lanza un cohete a escala desde el suelo. La altura, s , del cohete por arriba del piso t segundos después de que se lanza puede determinarse mediante la fórmula $s = -16t^2 + 90t$. Determine el tiempo que tardará el cohete en alcanzar una altura de 80 pies.



70. **Cohete a escala** Repita el ejercicio 69 para una altura de 100 pies.

Problemas de reto

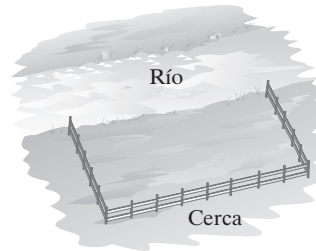
Determine todos los valores de c que hagan que en cada ecuación tenga **a)** dos soluciones reales, **b)** una solución real, y **c)** ninguna solución real.

71. $x^2 + 6x + c = 0$

72. $2x^2 + 3x + c = 0$

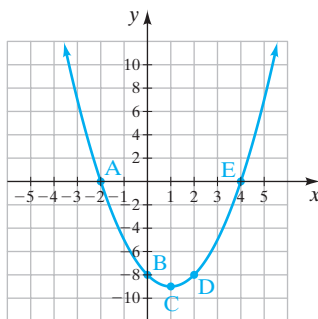
73. $-3x^2 + 6x + c = 0$

74. **Cercado de un área** La granjera Justina Wells desea formar una región rectangular junto a la ribera de un río, construyendo una cerca de tres lados, como ilustramos en el diagrama. Si ella sólo tiene 400 pies de cerca y desea encerrar un área de 15,000 pies cuadrados, determine las dimensiones de la región rectangular.



Actividad en grupo

75. En la sección 10.4 graficaremos ecuaciones cuadráticas. Aprenderemos que las gráficas de ecuaciones cuadráticas son *parábolas*. A continuación mostramos la gráfica de la ecuación cuadrática $y = x^2 - 2x - 8$.



- Cada integrante del grupo, copie la gráfica en su libreta.
- Miembro 1 del grupo: localice los pares ordenados que corresponden a los puntos A y B. Verifique que cada par ordenado es una solución para la ecuación $y = x^2 - 2x - 8$.
- Miembro 2 del grupo: localice los pares ordenados que corresponden a los puntos C y D. Verifique que cada par ordenado es una solución de la ecuación $y = x^2 - 2x - 8$.

- Miembro 3 del grupo: localice la pareja ordenada que corresponde al punto E. Verifique que el par ordenado es una solución de la ecuación $y = x^2 - 2x - 8$.
- En forma individual, grafique la ecuación $y = 2x - 3$ en los mismos ejes que utilizó en el inciso **a)**. Compare sus gráficas con los otros miembros de su grupo.
- Las dos gráficas representan el sistema de ecuaciones

$$y = x^2 - 2x - 8$$

$$y = 2x - 3$$

En grupo, estimen los puntos de intersección de las gráficas.

- Si igualamos las dos ecuaciones, obtenemos la ecuación cuadrática siguiente, con solo la variable x .

$$x^2 - 2x - 8 = 2x - 3$$

En grupo, resuelvan esta ecuación cuadrática. ¿Su respuesta coincide con las coordenadas x de los puntos de intersección del inciso **f)**?

- En grupo, utilicen los valores de x que encontraron en el inciso **g)** para determinar los valores de y en $y = x^2 - 2x - 8$ y $y = 2x - 3$. ¿Su respuesta coincide con las coordenadas y de los puntos de intersección del inciso **f)**?

Ejercicios de repaso acumulativo

[5.6, 10.2, 10.3] Resuelva las ecuaciones cuadráticas siguientes mediante **a)** factorización, **b)** completando el cuadrado, y **c)** la fórmula cuadrática. Si la ecuación no puede resolverse mediante factorización, indíquelo.

76. $x^2 - 13x + 42 = 0$

77. $6x^2 + 11x - 35 = 0$

78. $2x^2 + 3x - 4 = 0$

79. $6x^2 = 54$

[6.4] 80. Reste $\frac{x}{2x^2 + 7x - 4} - \frac{2}{x^2 - x - 20}$

10.4 GRAFICACIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS



- 1 Graficar ecuaciones cuadráticas con dos variables.
- 2 Determinar las coordenadas del vértice de una parábola.
- 3 Usar simetría para graficar ecuaciones cuadráticas.
- 4 Determinar las intersecciones con x de la gráfica de una ecuación cuadrática.

1 Graficar ecuaciones cuadráticas con dos variables

SUGERENCIA

SUGERENCIA
DE ESTUDIO

En esta sección graficaremos ecuaciones cuadráticas. Éstas pueden graficarse con sólo trazar puntos, como hicimos en el capítulo 7, cuando graficamos ecuaciones lineales. Sin embargo, existen ciertas instrucciones para graficarlas con mayor facilidad. Éstas incluyen la determinación del vértice de la gráfica, la determinación de las intersecciones con el eje x de la gráfica, y el uso de simetría para dibujar la gráfica. En breve analizaremos cada uno de estos temas.

En la sección 7.2 aprendimos cómo graficar ecuaciones lineales. En esta sección graficaremos ecuaciones cuadráticas de la forma

$$y = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

La gráfica de toda ecuación cuadrática de esta forma es una parábola. La gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ tendrá una de las formas que se indican en la figura 10.3. Cuando una ecuación cuadrática está en la forma $y = ax^2 + bx + c$, el signo de a , que es el coeficiente numérico del término cuadrático, determinará si la parábola abre hacia arriba (figura 10.3a) o hacia abajo (10.3b). Cuando a es positiva, la parábola abrirá hacia arriba, y cuando a es negativa, la parábola abrirá hacia abajo.

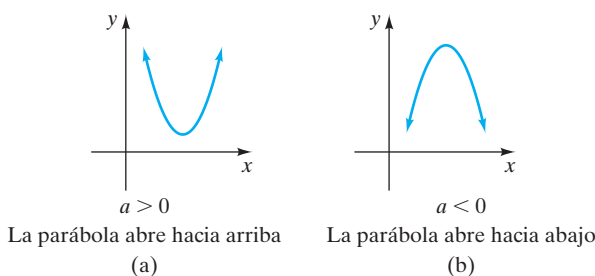


FIGURA 10.3

El **vértice** es el punto más bajo en una parábola que abre hacia arriba o el punto más alto en una parábola que abre hacia abajo (figura 10.4). Las gráficas de ecuaciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx + c$ tienen **simetría** respecto a la recta vertical que pasa por el vértice. Esto significa que si doblamos el papel a lo largo de esta recta imaginaria, denominada **eje de simetría**, los lados derecho e izquierdo de la gráfica coincidirán.

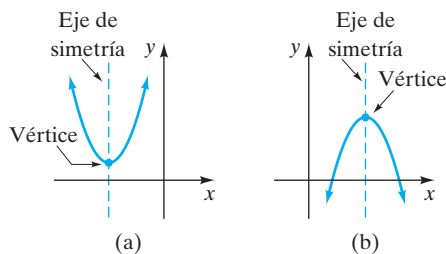


FIGURA 10.4

Un método que puede utilizar para graficar una ecuación cuadrática es trazar punto por punto. Cuando se determinan los puntos a trazar, seleccione valores para x y determine los valores correspondientes para y .

EJEMPLO 1 Grafique la ecuación $y = x^2$.

Solución Como $a = 1$, que es positivo, esta parábola abre hacia arriba.

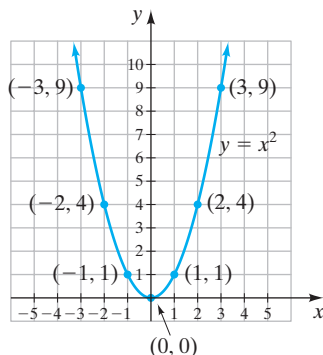


FIGURA 10.5

$$y = x^2$$

Sea $x = 3$,	$y = (3)^2 = 9$
Sea $x = 2$,	$y = (2)^2 = 4$
Sea $x = 1$,	$y = (1)^2 = 1$
Sea $x = 0$,	$y = (0)^2 = 0$
Sea $x = -1$,	$y = (-1)^2 = 1$
Sea $x = -2$,	$y = (-2)^2 = 4$
Sea $x = -3$,	$y = (-3)^2 = 9$

x	y
3	9
2	4
1	1
0	0
-1	1
-2	4
-3	9

Una los puntos mediante una curva suave (figura 10.5). Observe cómo la gráfica es simétrica respecto a la recta $x = 0$ (el eje y).

EJEMPLO 2 Grafique la ecuación $y = -2x^2 + 4x + 6$.

Solución Como $a = -2$, que es negativa, esta parábola abre hacia abajo.

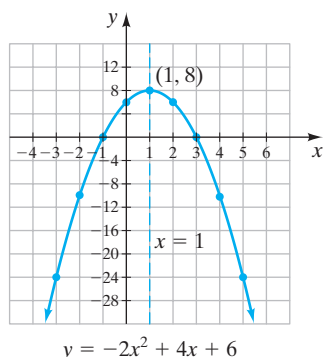


FIGURA 10.6

$$y = -2x^2 + 4x + 6$$

Sea $x = 5$,	$y = -2(5)^2 + 4(5) + 6 = -24$
Sea $x = 4$,	$y = -2(4)^2 + 4(4) + 6 = -10$
Sea $x = 3$,	$y = -2(3)^2 + 4(3) + 6 = 0$
Sea $x = 2$,	$y = -2(2)^2 + 4(2) + 6 = 6$
Sea $x = 1$,	$y = -2(1)^2 + 4(1) + 6 = 8$
Sea $x = 0$,	$y = -2(0)^2 + 4(0) + 6 = 6$
Sea $x = -1$,	$y = -2(-1)^2 + 4(-1) + 6 = 0$
Sea $x = -2$,	$y = -2(-2)^2 + 4(-2) + 6 = -10$
Sea $x = -3$,	$y = -2(-3)^2 + 4(-3) + 6 = -24$

x	y
5	-24
4	-10
3	0
2	6
1	8
0	6
-1	0
-2	-10
-3	-24

Observe cómo la gráfica (figura 10.6) es simétrica respecto a la recta $x = 1$, que aparece en forma punteada, ya que no es parte de la gráfica. El vértice de esta parábola es el punto $(1, 8)$. Como los valores de y son grandes, el eje y se ha marcado con intervalos de 4 unidades para permitirnos graficar los puntos $(-3, -24)$ y $(5, -24)$. Las flechas en los extremos de la gráfica indican que la parábola continúa indefinidamente.

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 23**

2 Determinar las coordenadas del vértice de una parábola

Al graficar ecuaciones cuadráticas, ¿cómo decidimos qué valores utilizar para x ? Cuando la ubicación del vértice no se conoce, ésta es una pregunta difícil de responder. Cuando se conoce, se hace más obvio qué valores utilizar.

En el ejemplo 2, el eje de simetría es $x = 1$, y la coordenada x del vértice también es 1. Para una ecuación cuadrática en la forma $y = ax^2 + bx + c$, tanto el eje de simetría como la coordenada x del vértice pueden encontrarse por medio de la siguiente fórmula.

Eje de simetría y coordenada x del vértice

$$x = -\frac{b}{2a}$$

En la ecuación cuadrática del ejemplo 2, $a = -2$, $b = 4$ y $c = 6$. Al sustituir estos valores en la fórmula para el eje de simetrías se obtiene

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2(-2)} = -\frac{4}{-4} = 1$$

Por tanto, la gráfica es simétrica respecto a la recta $x = 1$, y la coordenada x del vértice es 1.

La coordenada y del vértice puede determinarse sustituyendo el valor de la coordenada x del vértice en la ecuación cuadrática y resolver para y .

$$\begin{aligned} y &= -2x^2 + 4x + 6 \\ &= -2(1)^2 + 4(1) + 6 \\ &= -2(1) + 4 + 6 \\ &= -2 + 4 + 6 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Por lo que el vértice está en el punto $(1, 8)$.

Para una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, la coordenada y del vértice también puede determinarse mediante la fórmula siguiente.

Coordenada y del vértice

$$y = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Para el ejemplo 2,

$$\begin{aligned} y &= \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &= \frac{4(-2)(6) - 4^2}{4(-2)} \\ &= \frac{-48 - 16}{-8} = \frac{-64}{-8} = 8 \end{aligned}$$

Puede utilizar el método de su elección para determinar la coordenada y del vértice. Ambos métodos dan lugar al mismo valor de y .

3 Usar simetría para graficar ecuaciones cuadráticas

Un método para elegir los puntos para graficar parábolas es determinar el eje de simetría y el vértice de la gráfica. Luego seleccionar valores de x cercanos a cada lado del eje de simetría. Al graficar la ecuación hacemos uso de la simetría de la gráfica.

EJEMPLO 3

- Determine el eje de simetría de la gráfica de la ecuación $y = x^2 + 6x + 5$.
- Determine el vértice de la gráfica.
- Grafique la ecuación.

Solución a) $a = 1$, $b = 6$, $c = 5$.

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{6}{2(1)} = -3$$

La parábola es simétrica respecto a la recta $x = -3$. La coordenada del vértice es -3 .

b) Ahora determinamos la coordenada y del vértice. Sustituya -3 por x en la ecuación cuadrática.

$$y = x^2 + 6x + 5$$

$$y = (-3)^2 + 6(-3) + 5 = 9 - 18 + 5 = -4$$

El vértice está en el punto $(-3, -4)$.

c) Como el eje de simetría es $x = -3$, seleccionaremos valores para x que sean mayores o iguales a -3 . Con frecuencia es útil trazar cada punto conforme se determina. Si un punto parece que no está en la parábola, verifíquelo.

$$y = x^2 + 6x + 5$$

$$\text{Sea } x = -2, \quad y = (-2)^2 + 6(-2) + 5 = -3$$

$$\text{Sea } x = -1, \quad y = (-1)^2 + 6(-1) + 5 = 0$$

$$\text{Sea } x = 0, \quad y = (0)^2 + 6(0) + 5 = 5$$

x	y
-2	-3
-1	0
0	5

Graficamos estos puntos en la figura 10.7a. La gráfica completa de la ecuación se ilustra en la figura 10.7b. Observe cómo utilizamos la simetría para completar la gráfica. Los puntos $(-2, -3)$ y $(-4, -3)$ se encuentran a una unidad horizontal del eje de simetría, $x = -3$. Los puntos $(-1, 0)$ y $(-5, 0)$, cada uno, están a 2 unidades horizontales del eje de simetría, y los puntos $(0, 5)$ y $(-6, 5)$ están a 3 unidades horizontales del eje de simetría.

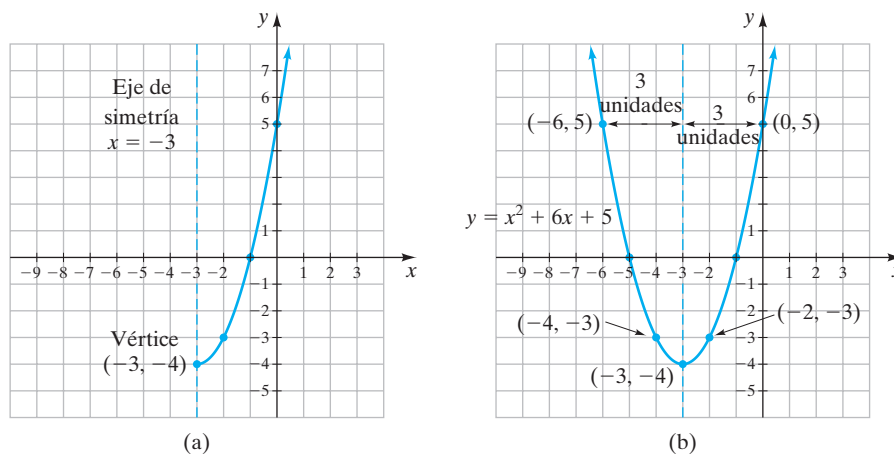


FIGURA 10.7

EJEMPLO 4 Grafique la ecuación $y = -2x^2 + 5x - 4$.

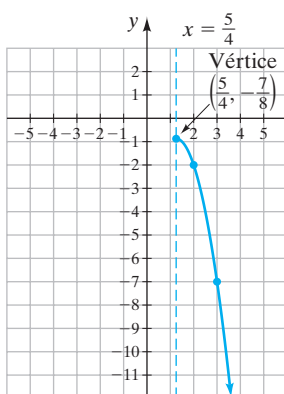
Solución $a = -2$, $b = 5$, $c = -4$.

Como $a < 0$, esta parábola abrirá hacia abajo.

$$\begin{aligned}\text{Eje de simetría: } x &= -\frac{b}{2a} \\ &= -\frac{5}{2(-2)} = -\frac{5}{-4} = \frac{5}{4} \quad \left(\text{o } 1\frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

Como el valor x del vértice es una fracción, necesitaríamos sumar fracciones si deseamos determinar y sustituyendo $\frac{5}{4}$ por x en la ecuación dada. Por tanto, utilizaremos la fórmula para determinar la coordenada y del vértice.

$$\begin{aligned}y &= \frac{4ac - b^2}{4a} \\ &= \frac{4(-2)(-4) - 5^2}{4(-2)} = \frac{32 - 25}{-8} = \frac{7}{-8} = -\frac{7}{8}\end{aligned}$$



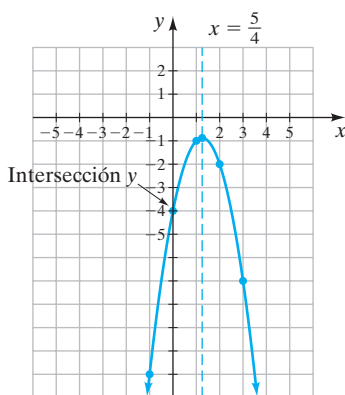
(a)

El vértice de esta gráfica está en el punto $(\frac{5}{4}, -\frac{7}{8})$. Como el eje de simetría es $x = \frac{5}{4}$, iniciaremos por seleccionar valores de x que sean mayores que $\frac{5}{4}$, o $1\frac{1}{4}$.

$$y = -2x^2 + 5x - 4$$

$$\begin{aligned}\text{Sea } x &= 2, & y &= -2(2)^2 + 5(2) - 4 = -2 \\ \text{Sea } x &= 3, & y &= -2(3)^2 + 5(3) - 4 = -7 \\ \text{Sea } x &= 4, & y &= -2(4)^2 + 5(4) - 4 = -16\end{aligned}$$

x	y
2	-2
3	-7
4	-16



(b)

Cuando el eje de simetría es un valor fraccionario, sea muy cuidadoso al elaborar la gráfica. Debe trazar tantos puntos adicionales como sean necesarios. A continuación determinamos algunos valores de y cuando x es menor que $\frac{5}{4}$.

$$\begin{aligned}\text{Sea } x &= 1 & y &= -2(1)^2 + 5(1) - 4 = -1 \\ \text{Sea } x &= 0 & y &= -2(0)^2 + 5(0) - 4 = -4 \\ \text{Sea } x &= -1 & y &= -2(-1)^2 + 5(-1) - 4 = -11\end{aligned}$$

x	y
1	-1
0	-4
-1	-11

La figura 10.8a muestra los puntos trazados a la derecha del eje de simetría. La figura 10.8b muestra la gráfica terminada. El punto $(4, -16)$ no se muestra en las gráficas.

FIGURA 10.8

AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 19

Al graficar, con frecuencia tendremos que evaluar expresiones cuadráticas para obtener valores para y . Podría revisar *Evaluación de expresiones* como se explica en el recuadro Uso de la calculadora en la sección 1.9 de la página 79.

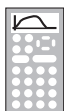


(a)



(b)

FIGURA 10.9 No toda forma que parece parábola es una parábola. Por ejemplo, el Arco de San Luis, figura 10.9a parece una parábola, pero no lo es. Sin embargo, el puente sobre el Mississippi, cerca de Jefferson Barracks, Missouri, que conecta a Missouri e Illinois, figura 10.9b, es una parábola.



Uso de la calculadora graficadora

Ahora analizamos cómo determinar el vértice de una parábola. En el ejemplo 3 graficamos $y = x^2 + 6x + 5$. Esta gráfica se muestra en la ventana de una TI-83 Plus en la figura 10.10, utilizando la configuración de la ventana estándar.

Podemos utilizar el menú CALC (calcular) para determinar el vértice. El vértice de una parábola también se denomina punto mínimo (si la parábola abre hacia arriba) o el punto máximo (si la parábola abre hacia abajo).

Para obtener el menú CALC presione $\boxed{2^{\text{nd}}}$ $\boxed{\text{TRACE}}$. El menú CALC se muestra en la figura 10.11.

Como esta gráfica abre hacia arriba, tiene un punto mínimo. Recorrer el menú CALC a la opción 3: minimum y presione $\boxed{\text{ENTER}}$, que le proporciona la gráfica que se muestra en la figura 10.12. Observe que el cursor está en la intersección y, (0, 5). Utilice la tecla de flecha hacia la izquierda para mover el curso hacia la izquierda. Observe los valores de X y Y cambian conforme mueve el cursor. El valor de Y disminuirá hasta que el cursor llegue al vértice. Cuando se mueva el cursor pasando el vértice, el valor de Y empezará a aumentar. Mueva el cursor justo a la izquierda del vértice y presione $\boxed{\text{ENTER}}$. Observe las palabras *Left Bound?* cambian a *Right Bound?*

Ahora mueva el curso justo a la derecha del vértice y presione $\boxed{\text{ENTER}}$.

La pantalla ahora muestra *Guess?* Nuevamente presione $\boxed{\text{ENTER}}$ y obtiene la pantalla que se muestra en la figura 10.13.

La figura 10.13 muestra que el punto mínimo de la gráfica tiene lugar cuando $x = -3$ y $y = -4$. Por tanto, el vértice está en $(-3, -4)$.

Si la parábola abre hacia abajo, la gráfica tendría un punto máximo. En este caso, para obtener el vértice utilizaríamos el menú CALC, opción 4: maximum, para obtener el vértice. Luego seguiríamos el mismo procedimiento básico para determinar el punto máximo.

Ejercicios

Utilice su calculadora graficadora para determinar el vértice de la gráfica de cada ecuación. Podría ser necesario que ajuste la configuración de su ventana para mostrar el vértice.

1. $y = x^2 - 2x - 3$

2. $y = x^2 - 7x + 10$

3. $y = -2x^2 - 2x + 12$

4. $y = 2x^2 - 7x - 15$

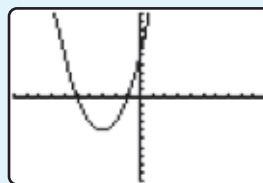


FIGURA 10.10

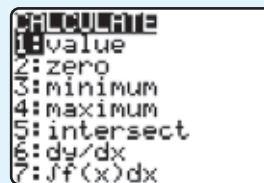


FIGURA 10.11

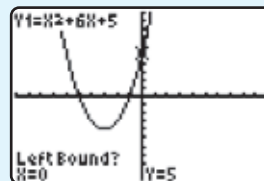


FIGURA 10.12

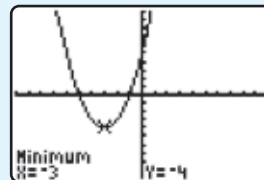


FIGURA 10.13

4 Determinar las intersecciones con x de la gráfica de una ecuación cuadrática

En el ejemplo 4 la gráfica cruza el eje y en $y = -4$. Recuerde que en las secciones anteriores vimos que para determinar la intersección con y hacemos $x = 0$ y despejamos y en la ecuación resultante. Las ubicaciones de las intersecciones con x y con y con frecuencia son útiles cuando se grafican ecuaciones cuadráticas.

Para determinar la intersección con x cuando graficamos líneas rectas en la sección 7.2, hicimos $y = 0$ y determinamos el valor correspondiente de x . Hicimos esto porque el valor de y en donde una gráfica cruza el eje x es 0. Aquí utilizamos el mismo procedimiento cuando determinamos las intersecciones con x de una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$. Para determinar las intersecciones con x de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$, hacemos y igual a 0 y resolvemos la ecuación resultante, $ax^2 + bx + c = 0$. Las soluciones reales de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se denominan los *ceros* (o *raíces*) de la ecuación, porque cuando se sustituyen por x en $y = ax^2 + bx + c$, y tiene un valor de cero. Los ceros pueden utilizarse para determinar las intersecciones x de la gráfica de $y = ax^2 + bx + c$ ya que los ceros son las coordenadas x de las intersecciones con el eje x . Para resolver ecuaciones de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, podemos utilizar la factorización, como se explicó en la sección 10.2, o la fórmula cuadrática, como explicamos en la sección 10.3.

En la sección 10.3 mencionamos que al resolver ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, cuando el discriminante, $b^2 - 4ac$, es mayor que cero, existen dos soluciones reales y distintas; cuando es igual a cero, sólo existe una solución real, y cuando es menor que cero, no existen soluciones reales.

Una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$ tendrá dos intersecciones con x distintas (figura 10.14a), una intersección con x (figura 10.14b) o ninguna intersección con x (figura 10.14c). El número de intersecciones con x puede determinarse por medio del discriminante.

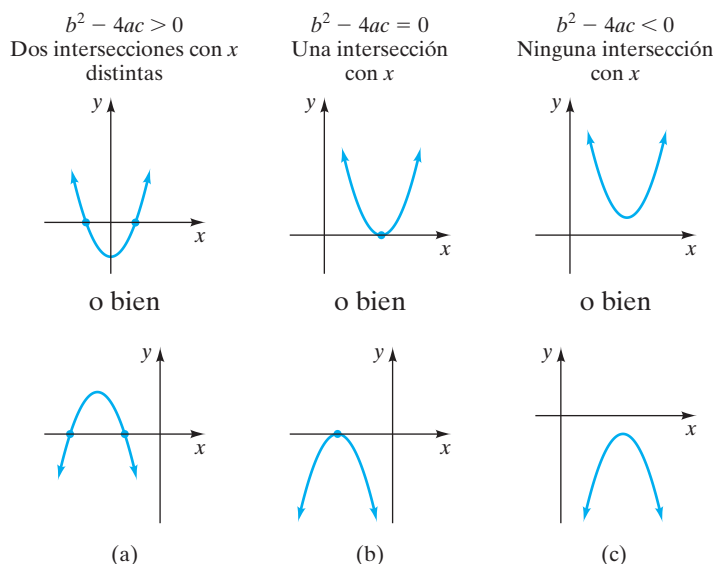


FIGURA 10.14

Las intersecciones con x pueden determinarse en forma gráfica. También pueden encontrarse en forma algebraica, haciendo y igual a 0 y resolviendo la ecuación resultante, como en el ejemplo 5.

EJEMPLO 5

- a) Determine las intersecciones con x de la gráfica con ecuación $y = x^2 - 6x - 7$, por medio de factorización, completando el cuadrado y mediante la fórmula cuadrática.
- b) Grafique la ecuación.

Solución **a)** Para determinar en forma algebraica las intersecciones con x , hacemos y igual a 0 y resolvemos la ecuación, $x^2 - 6x - 7 = 0$. Resolveremos esta ecuación por los tres métodos algebraicos.

Método 1: Por factorización.

$$\begin{aligned}x^2 - 6x - 7 &= 0 \\(x - 7)(x + 1) &= 0 \\x - 7 = 0 \quad \text{o bien} \quad x + 1 &= 0 \\x = 7 \quad \quad \quad x &= -1\end{aligned}$$

Método 2: Completando el cuadrado.

$$\begin{aligned}x^2 - 6x - 7 &= 0 \\x^2 - 6x &= 7 \\x^2 - 6x + 9 &= 7 + 9 \\(x - 3)^2 &= 16 \\x - 3 &= \pm 4 \\x &= 3 \pm 4 \\x = 3 + 4 \quad \text{o bien} \quad x &= 3 - 4 \\x = 7 \quad \quad \quad x &= -1\end{aligned}$$

Método 3: Fórmula cuadrática

$$\begin{aligned}x^2 - 6x - 7 &= 0 \\a = 1, \quad b = -6, \quad c &= -7 \\x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\&= \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-7)}}{2(1)} \\&= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 28}}{2} \\&= \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} \\&= \frac{6 \pm 8}{2} \\x = \frac{6 + 8}{2} \quad \text{o bien} \quad x &= \frac{6 - 8}{2} \\&= \frac{14}{2} = 7 \quad \quad \quad = \frac{-2}{2} = -1\end{aligned}$$

Observe que obtuvimos las mismas soluciones, 7 y -1 , con los tres métodos. La gráfica de la ecuación $y = x^2 - 6x - 7$ tendrá dos intersecciones distintas con x . La gráfica cruzará el eje x en 7 y en -1 . Las intersecciones son $(7, 0)$ y $(-1, 0)$.

b) Como $a > 0$, esta parábola abre hacia arriba.

$$\text{eje de simetría: } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2(1)} = \frac{6}{2} = 3$$

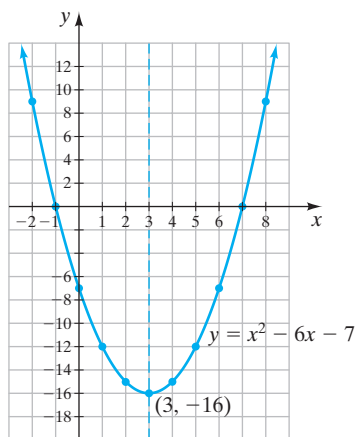


FIGURA 10.15

$$y = x^2 - 6x - 7$$

Sea $x = 3$,	$y = 3^2 - 6(3) - 7 = -16$
Sea $x = 4$,	$y = 4^2 - 6(4) - 7 = -15$
Sea $x = 5$,	$y = 5^2 - 6(5) - 7 = -12$
Sea $x = 6$,	$y = 6^2 - 6(6) - 7 = -7$
Sea $x = 7$,	$y = 7^2 - 6(7) - 7 = 0$
Sea $x = 8$,	$y = 8^2 - 6(8) - 7 = 9$

x	y
3	-16
4	-15
5	-12
6	-7
7	0
8	9

El vértice está en $(3, -16)$. Nuevamente utilizamos la simetría para completar la gráfica (figura 10.15). Las intersecciones x $(7, 0)$ y $(-1, 0)$ coinciden con la respuesta obtenida en el inciso a).



AHORA RESUELVA EL EJERCICIO 31



Uso de la calculadora graficadora

Las intersecciones con x de una parábola pueden determinarse por medio de una calculadora graficadora. Lea el manual que acompaña a su calculadora graficadora para enterarse cómo determinar las intersecciones x de una parábola. En la TI-83 Plus, puede utilizar el menú CALC (calcular) con la opción 2: *zero* (vea la figura 10.11).

Conjunto de ejercicios 10.4

Ejercicios conceptuales

- ¿Cómo llamamos a la gráfica de una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$?
- ¿Qué es el vértice de una parábola?
- Explique cómo determinar las coordenadas de los vértices de una parábola.
- ¿Qué determina si la gráfica de una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, es una parábola que abre hacia arriba o hacia abajo? Explique su respuesta.
- ¿Qué son las intersecciones con x de una gráfica?
 - ¿Cómo puede determinar, de forma algebraica, las intersecciones con x de una gráfica?
- ¿Qué significa cuando decimos que las gráficas de ecuaciones cuadráticas de la forma $y = ax^2 + bx + c$ tienen simetría alrededor de una recta vertical imaginaria que pasa por el vértice?
- Cuando se grafica una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, ¿cuál es la ecuación de la recta vertical alrededor de la cual la parábola será simétrica?
 - ¿Cómo se llama esta recta vertical?
- ¿Cuántas intersecciones con x tendrá la gráfica de una ecuación cuadrática, si el discriminante tiene un valor de
 - 25?
 - 2?
 - 0?

Práctica de habilidades

Indique el eje de simetría, las coordenadas del vértice, y si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

- $y = x^2 + 4x - 3$
- $y = -x^2 + 3x - 4$
- $y = -3x^2 + 2x + 8$
- $y = 4x^2 + 8x + 3$
- $y = 2x^2 + 3x + 5$
- $y = -5x^2 + 6x - 1$
- $y = x^2 + 2x - 8$
- $y = 3x^2 + 6x - 9$
- $y = x^2 + 3x - 6$
- $y = 3x^2 - 2x + 2$
- $y = -x^2 + x + 8$
- $y = -2x^2 - 6x - 5$

Grafique cada ecuación cuadrática y determine las intersecciones con el eje x , si las hay.

21. $y = x^2 - 1$

22. $y = x^2 + 3$

23. $y = -x^2 + 5$

24. $y = -x^2 - 1$

25. $y = x^2 + 4x + 3$

26. $y = 2x^2 + 2$

27. $y = x^2 + 4x + 4$

28. $y = x^2 + 2x - 15$

29. $y = -x^2 - 5x - 4$

30. $y = x^2 - 4x - 5$

31. $y = x^2 + 5x - 6$

32. $y = -x^2 - 5x + 6$

33. $y = x^2 + 5x - 14$

34. $y = 2x^2 + 4x + 2$

35. $y = x^2 - 6x + 9$

36. $y = x^2 - 4x + 4$

37. $y = x^2 - 6x$

38. $y = -x^2 + 5x$

39. $y = 4x^2 + 12x + 9$

40. $y = x^2 - 2x + 1$

41. $y = -x^2 + 7x - 10$

42. $y = x^2 + x + 1$

43. $y = x^2 - 2x - 16$

44. $y = 2x^2 + 3x - 2$

45. $y = -2x^2 + 3x - 2$

46. $y = -4x^2 - 6x + 4$

47. $y = 2x^2 - x - 15$

48. $y = 6x^2 + 10x - 4$

Utilizando el discriminante, determine el número de intersecciones con x que tendrá la gráfica de cada ecuación. No grafique la ecuación.

49. $y = 4x^2 - 2x - 16$

50. $y = -x^2 - 5$

51. $y = 4x^2 - 6x - 7$

52. $y = x^2 - 6x + 9$

53. $y = x^2 - 20x + 100$

54. $y = -4.3x^2 + 5.7x$

55. $y = 5.7x^2 + 2x - 3.9$

56. $y = 5x^2 - 13.2x + 9.3$

Solución de problemas

La gráfica de una ecuación cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola. Se dan valor de a (el coeficiente del término cuadrático) y el vértice de la parábola. Determine el número de intersecciones x que tendrá la parábola. Explique cómo determinó su respuesta.

57. $a = -2$, vértice en $(0, -3)$.

58. $a = 5$, vértice en $(4, -3)$.

59. $a = -3$, vértice en $(-4, 0)$.

60. $a = -1$, vértice en $(2, -4)$.

61. ¿Las siguientes ecuaciones tendrán las mismas intersecciones x cuando se grafican? Explique cómo determinó su respuesta.

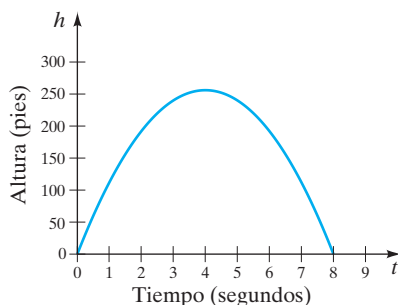
$$y = x^2 - 2x - 15 \quad y \quad y = -x^2 + 2x + 15$$

62. a) ¿Cómo se compararán las gráficas de las ecuaciones siguientes? Explique cómo determinó su respuesta.

$$y = x^2 - 2x - 8 \quad y \quad y = -x^2 + 2x + 8$$

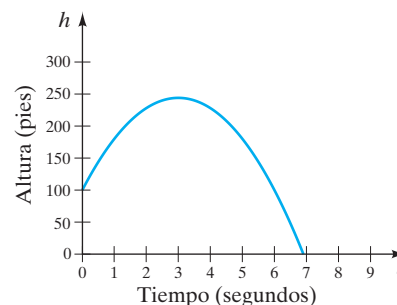
- b) En los mismos ejes, grafique $y = x^2 - 2x - 8$ y $y = -x^2 + 2x + 8$.

63. **Altura sobre el piso** Un objeto se lanza hacia arriba desde el piso. La altura del objeto por encima del suelo, en pies, en el instante t en segundos, se ilustra en la gráfica siguiente.



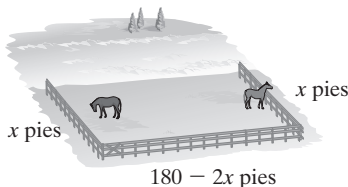
- Estime la altura máxima que el objeto alcanzará.
- ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en llegar a su altura máxima?
- Estime cuánto tardará el objeto en chocar con el suelo.
- Estime la altura del objeto a los 2 segundos y a los 5 segundos.

64. **Altura sobre el piso** Un objeto es lanzado hacia arriba desde una plataforma que se encuentra a 100 pies del piso. La altura del objeto por encima del suelo, en pies, en el instante t en segundos, se ilustra en la gráfica siguiente.



- Estime la altura máxima que el objeto alcanzará.
- ¿Cuánto tiempo tardará el objeto en llegar a su altura máxima?
- Aproximadamente, ¿cuánto tardará el objeto en chocar con el suelo?
- Estime la altura del objeto a los 2 segundos y a los 5 segundos.

65. **Área máxima** Un área está cercada a lo largo de un río, como se muestra en la figura. Sólo están disponibles 180 pies de cerca. El área cercada es $A = \text{largo} \cdot \text{ancho}$, o $A = x(180 - 2x) = -2x^2 + 180x$.



- a) Grafique $A = -2x^2 + 180x$.

- b) Utilizando la gráfica estime, el valor de x que dará el área máxima.
c) Estime el área máxima.

66. **Área máxima** Lea el ejercicio 65. Si están disponibles 260 pies de cerca, el área cercada es $A = x(260 - 2x) = -2x^2 + 260x$.

- a) Grafique $A = -2x^2 + 260x$.
b) Utilizando la gráfica, estime el valor de x que dará el área máxima.
c) Estime el área máxima.

Problemas de reto

67. a) Grafique la ecuación cuadrática $y = -x^2 + 6x$.
b) En los mismos ejes, grafique la ecuación cuadrática $y = x^2 - 2x$.
c) Estime los puntos de intersección de las gráficas. Los puntos representan la solución del sistema de ecuaciones.
68. a) Grafique la ecuación cuadrática $y = x^2 + 2x - 3$.
b) En los mismos ejes, grafique la ecuación cuadrática $y = -x^2 + 1$.
c) Estime los puntos de intersección de las gráficas. Los puntos representan la solución para el sistema de ecuaciones.

Ejercicios de repaso acumulativo

[6.4] 69. Reste $\frac{3}{x+3} - \frac{x-2}{x-4}$.

[6.6] 70. Resuelva la ecuación

$$\frac{1}{3}(x+6) = 3 - \frac{1}{4}(x-5).$$

[8.3] 71. Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$5x + 4y = 10$$

$$3x + 5y = -7$$

[9.5] 72. Resuelva la ecuación $3\sqrt{2x} - 12 = 0$.

10.5 NÚMEROS COMPLEJOS



- 1 Escribir números complejos utilizando i .
- 2 Sumar y restar números complejos.
- 3 Resolver ecuaciones cuadráticas con soluciones en los números complejos.

1 Escribir números complejos utilizando i

En la sección 10.3 establecimos que las raíces cuadradas de números negativos, como $\sqrt{-11}$, no son números reales. Números como $\sqrt{-11}$ se denominan **números imaginarios**. Se denominan así porque cuando se introdujeron, muchos matemáticos rechazaron creer que existían. Aunque no pertenecen al conjunto de los números reales, los números imaginarios existen y son muy útiles en matemáticas y ciencias.

Todo número imaginario tiene como factor a $\sqrt{-1}$. La $\sqrt{-1}$ se denomina **unidad imaginaria**; con frecuencia se denota por medio de la letra i .

$$i = \sqrt{-1}$$

Por tanto, podemos escribir

$$\sqrt{-4} = \sqrt{4} \sqrt{-1} = 2\sqrt{-1} = 2i$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9} \sqrt{-1} = 3\sqrt{-1} = 3i$$

$$\sqrt{-11} = \sqrt{11} \sqrt{-1} = \sqrt{11}i \quad \text{o bien} \quad i\sqrt{11}$$

Por lo general escribiremos $i\sqrt{11}$ en lugar de $\sqrt{11}i$ para evitar la confusión con $\sqrt{11i}$.

Para auxiliar en la escritura de raíces cuadradas de números negativos donde se utiliza i , se proporciona la regla siguiente.

Para cualquier número real positivo n ,

$$\sqrt{-n} = i\sqrt{n}$$

Ejemplos

$$\sqrt{-4} = i\sqrt{4} = 2i \qquad \sqrt{-3} = i\sqrt{3}$$

$$\sqrt{-25} = i\sqrt{25} = 5i \qquad \sqrt{-10} = i\sqrt{10}$$

El sistema de los números reales es parte de un sistema más grande de números, denominado *sistema de números complejos*. Ahora estudiaremos los **números complejos**.

DEFINICIÓN

Todo número de la forma

$$a + bi$$

donde a y b son números reales, es un **número complejo**.

Todo número real y todo número imaginario también son números complejos. Un número complejo tiene dos partes: una parte real, a , y una parte imaginaria, b .

$$\begin{array}{ccc} \text{Parte real.} & \longrightarrow & \text{Parte imaginaria.} \\ & \searrow & \searrow \\ & a & + & bi \end{array}$$

Si $b = 0$, el número complejo es un número real. Si $a = 0$, el número complejo es un *número imaginario puro*.

Ejemplos de números complejos

$3 + 4i$	$a = 3, \quad b = 4$	
$5 - i\sqrt{3}$	$a = 5, \quad b = -\sqrt{3}$	
5	$a = 5, \quad b = 0$	(número real, $b = 0$)
$2i$	$a = 0, \quad b = 2$	(número imaginario, $a = 0$)
$-i\sqrt{7}$	$a = 0, \quad b = -\sqrt{7}$	(número imaginario, $a = 0$)

Ya indicamos que todos los números reales y todos los imaginarios también son números complejos. La relación entre los diferentes conjuntos de números se ilustra en la figura 10.16. Como ilustra la figura, los números reales incluyen tanto a los números racionales como a los números irracionales, y los números complejos incluyen a los números reales y a los números no reales.

Números complejos		
Números reales		Números no reales
Números racionales $\frac{1}{2}, -\frac{3}{5}, \frac{9}{4}$ Enteros $-4, -9,$ Enteros no negativos $0, 4, 12$	Números irracionales $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ $-\sqrt{7}, \pi$	$\sqrt{-4}$ $2 + 3i$ $6 - 4i$ $\sqrt{2} + i\sqrt{3}$ $i\sqrt{5}$ $6i$

FIGURA 10.16

EJEMPLO 1 Escriba cada uno de los siguientes números complejos en la forma $a + bi$.

a) $5 + \sqrt{-4}$ **b)** $3 - \sqrt{-12}$

Solución **a)** $5 + \sqrt{-4} = 5 + \sqrt{4} \sqrt{-1}$
 $= 5 + 2i$

b) $3 - \sqrt{-12} = 3 - \sqrt{12} \sqrt{-1}$
 $= 3 - \sqrt{4} \sqrt{3} \sqrt{-1}$
 $= 3 - 2\sqrt{3}i$ o bien $3 - 2i\sqrt{3}$

AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 21



En el ejemplo 6 de la sección 10.3, obtuvimos la respuesta $\frac{1 + \sqrt{-11}}{6}$ y $\frac{1 - \sqrt{-11}}{6}$. Indicamos que como $\sqrt{-11}$ no es un número real allí nos detendríamos. Ahora podemos reescribir estas respuestas como $\frac{1 + i\sqrt{11}}{6}$ y $\frac{1 - i\sqrt{11}}{6}$, o bien $\frac{1 \pm i\sqrt{11}}{6}$.

2 Sumar y restar números complejos

Los números complejos pueden sumarse, restarse, multiplicarse y dividirse. Para sumar (o restar) números complejos, sume (o reste) sus partes reales y sume (o reste) sus partes imaginarias.

EJEMPLO 2 Suma cada uno de los siguiente números complejos.

a) $3 + 6i$ y $-2 - 3i$ **b)** $-4 - 5i$ y $-3 - 2i$

Solución **a)** $(3 + 6i) + (-2 - 3i) = (3 - 2) + (6i - 3i)$
 $= 1 + 3i$

b) $(-4 - 5i) + (-3 - 2i) = (-4 - 3) + (-5i - 2i)$
 $= -7 - 7i$



Los números complejos también pueden multiplicarse y dividirse, pero en este texto no multiplicaremos ni dividiremos números complejos.

3 Resolver ecuaciones cuadráticas con soluciones en los números complejos

Antes de terminar esta sección resolvemos una ecuación cuadrática que no tiene soluciones reales. Escribiremos las respuestas como números complejos.

EJEMPLO 3 Resuelva la ecuación $2x^2 - 4x + 7 = 0$.

Solución Utilizaremos la fórmula cuadrática.

$$\begin{aligned}
 a &= 2, \quad b = -4, \quad c = 7 \\
 x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\
 &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(2)(7)}}{2(2)} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 56}}{4} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{-40}}{4} \\
 &= \frac{4 \pm \sqrt{4} \sqrt{10} \sqrt{-1}}{4} \\
 &= \frac{4 \pm 2i\sqrt{10}}{4} \\
 &= \frac{2(2 \pm i\sqrt{10})}{4} \\
 &= \frac{2 \pm i\sqrt{10}}{2}
 \end{aligned}$$

Fórmula cuadrática.

Éstos son números complejos.

Escribir los números complejos utilizando i .

Factorizar el numerador, dividir entre los factores comunes.

**AHORA RESUELVA
EL EJERCICIO 51**

Las soluciones, $\frac{2 + i\sqrt{10}}{2}$ y $\frac{2 - i\sqrt{10}}{2}$, son números complejos.



Conjunto de ejercicios 10.5

Ejercicios conceptuales

1. ¿Todo número real es un número complejo? Explique.
2. ¿Hay números complejos que son números reales? Si es así, ¿cuántos números complejos son números reales? Explique.
3. ¿Cuál es el valor de i ?
4. a) ¿Es $\sqrt{-11}$ un elemento del sistema de los números reales? Explique.
b) ¿Es $\sqrt{-11}$ un número del sistema de números complejos? Explique.
5. ¿Cuál es la forma general de un número complejo?
6. Explique cómo sumar o restar números complejos.

Práctica de habilidades

Escriba cada número imaginario en términos de i .

7. $\sqrt{-4}$

8. $\sqrt{-9}$

9. $\sqrt{-100}$

10. $\sqrt{-64}$

11. $\sqrt{-15}$

12. $\sqrt{-10}$

13. $\sqrt{-23}$

14. $\sqrt{-13}$

15. $\sqrt{-8}$

16. $\sqrt{-18}$

17. $\sqrt{-20}$

18. $\sqrt{-98}$

Escriba cada número complejo en la forma $a + bi$.

19. $5 + \sqrt{-4}$

20. $7 + \sqrt{-16}$

21. $-3 + \sqrt{-25}$

22. $-6 + \sqrt{-64}$

23. $-1 - \sqrt{-9}$

24. $-4 - \sqrt{-81}$

25. $-3 - \sqrt{-15}$

26. $-5 - \sqrt{-6}$

27. $5.2 + \sqrt{-50}$

28. $6.3 - \sqrt{-32}$

29. $\frac{1}{2} + \sqrt{-75}$

30. $-\frac{3}{5} + \sqrt{-80}$

Sume o reste los siguientes números complejos.

31. $(2 + 3i) + 5$

32. $(3 - 5i) + 6$

33. $(4 - 3i) - 8i$

34. $(12 - 5i) - 7i$

35. $(5 + 3i) + (6 + 2i)$

36. $(8 - 5i) + (3 - 2i)$

37. $(4 - 3i) - (6 + 4i)$

38. $(9 - 13i) - (9 - 4i)$

39. $(8 - 6i) - (8 - 6i)$

40. $(16 - 4i) - (4 - 4i)$

41. $(45 - 3i) - (36 + i)$

42. $(7 - 5i) - (12 + 8i)$

Resuelva la ecuación cuadrática y escriba las soluciones en términos de i .

43. $x^2 = -16$

44. $x^2 = -25$

45. $2x^2 = -20$

46. $3a^2 = -36$

47. $x^2 - 4x + 5 = 0$

48. $x^2 + 6x + 11 = 0$

49. $2r^2 + 3r + 5 = 0$

50. $3w^2 - 5w + 8 = 0$

51. $2p^2 + 4p + 9 = 0$

52. $4m^2 - 6m + 9 = 0$

53. $-4w^2 + 5w - 9 = 0$

54. $-3z^2 - 2w - 10 = 0$

Solución de problemas

55. ¿Bajo qué condiciones una ecuación de la forma $x^2 = c$ tendrá soluciones imaginarias?

57. ¿Bajo qué condiciones una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ tendrá soluciones que no sean números reales?

56. Una ecuación de la forma $x^2 = c$, ¿puede tener sólo una solución imaginaria? Explique.

58. ¿Es posible, para una ecuación cuadrática, tener sólo una solución que sea un número no real? Explique.

Ejercicios de repaso acumulativo

[1.9] 59. Evalúe $- \{ [3(x - 4)^2 - 5] - 3x \}$ cuando $x = 6$

[2.5] 60. Resuelva la ecuación $\frac{1}{2}x + \frac{3}{5}x = \frac{1}{2}(x - 2)$

[6.7] 61. Resuelva la ecuación $\frac{w - 1}{w - 5} = \frac{3}{w - 5} + \frac{3}{4}$

[9.5] 62. Resuelva la ecuación $2\sqrt{r - 4} + 3 = 9$

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Términos y frases importantes

10.1

Ecuación cuadrática
Forma estándar de una ecuación cuadrática
Propiedad de la raíz cuadrada

10.2

Completar el cuadrado
Trinomio cuadrado perfecto

10.3

Discriminante
Fórmula cuadrática

10.4

Eje de simetría
Parábola
Simetría
Vértice de una parábola

10.5

Número complejo
Número imaginario
Unidad imaginaria

(continúa en la página siguiente)

HECHOS IMPORTANTES	
Propiedad de la raíz cuadrada:	Si $x^2 = a$, entonces $x = \sqrt{a}$ o $x = -\sqrt{a}$ (o bien $x = \pm\sqrt{a}$).
Fórmula cuadrática:	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
Discriminante:	$b^2 - 4ac$ Si $b^2 - 4ac > 0$ la ecuación cuadrática tiene dos soluciones reales y distintas. Si $b^2 - 4ac = 0$ la ecuación cuadrática tiene una solución real. Si $b^2 - 4ac < 0$ la ecuación cuadrática no tiene solución real.
Coordenadas del vértice de una parábola:	$\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right).$
Unidad imaginaria:	$i = \sqrt{-1}$
Números complejos	son números de la forma $a + bi$, en donde a y b son números reales.

Ejercicios de repaso del capítulo

[10.1] Resuelva mediante la propiedad de la raíz cuadrada.

1. $x^2 = 64$
2. $x^2 = 12$
3. $2x^2 = 12$
4. $x^2 + 4 = 9$
5. $x^2 - 4 = 16$
6. $2x^2 - 4 = 10$
7. $4a^2 - 30 = 2$
8. $(r - 3)^2 = 20$
9. $(4t - 3)^2 = 50$
10. $(2x + 4)^2 = 30$

[10.2] Resuelva completando el cuadrado.

11. $x^2 - 7x + 10 = 0$
12. $x^2 - 11x + 28 = 0$
13. $x^2 - 18x + 17 = 0$
14. $x^2 + x - 6 = 0$
15. $t^2 - 3t - 54 = 0$
16. $x^2 = -5x + 6$
17. $y^2 - 5y - 7 = 0$
18. $x^2 + 2x - 5 = 0$
19. $2x^2 - 8x = 64$
20. $30 = 2n^2 - 4n$
21. $3p^2 = -2p + 8$
22. $6x^2 - 19x + 15 = 0$

[10.3] Determine si cada ecuación tiene dos soluciones reales y distintas, una solución real, o ninguna solución real.

23. $-4x^2 + 4x - 6 = 0$
24. $-3x^2 + 4x = 9$
25. $x^2 - 10x + 25 = 0$
26. $y^2 + 2y - 8 = 0$
27. $4z^2 - 3z = 6$
28. $3x^2 - 4x + 5 = 0$
29. $-3x^2 - 4x + 8 = 0$
30. $x^2 - 9x + 6 = 0$

Utilice la fórmula cuadrática para resolver. Si una ecuación no tiene soluciones reales, indíquelo.

31. $x^2 - 10x + 16 = 0$

32. $x^2 - 7x - 44 = 0$

33. $x^2 = 10x - 9$

34. $5x^2 - 7x = 6$

35. $21 = r^2 + 4r$

36. $x^2 - x + 12 = 0$

37. $6x^2 + x - 15 = 0$

38. $-2x^2 + 3x + 6 = 0$

39. $2x^2 + 4x - 3 = 0$

40. $y^2 - 6y + 3 = 0$

41. $3x^2 - 4x + 6 = 0$

42. $3x^2 - 6x - 8 = 0$

43. $7x^2 - 3x = 0$

44. $2z^2 = 5z$

[10.1–10.3] Resuelva cada ecuación cuadrática utilizando el método de su elección.

45. $x^2 - 10x + 24 = 0$

46. $x^2 + 15x + 56 = 0$

47. $r^2 - 3r - 70 = 0$

48. $x^2 + 6x = 27$

49. $x^2 - 4x - 60 = 0$

50. $x^2 - x - 42 = 0$

51. $y^2 + 9y - 22 = 0$

52. $t^2 = 5t$

53. $x^2 = 81$

54. $2x^2 + 5x = 3$

55. $2x^2 = 9x - 10$

56. $6x^2 + 5x = 6$

57. $6n = 2n^2 - 9$

58. $3x^2 - 11x + 10 = 0$

59. $-5w = 3w^2 - 8$

60. $x^2 + 3x = 6$

61. $4x^2 - 9x = 0$

62. $3x^2 + 5x = 0$

[10.4] Indique el eje de simetría, las coordenadas del vértice y si la parábola abre hacia arriba o hacia abajo.

63. $y = x^2 - 6x - 5$

64. $y = x^2 - 12x + 6$

65. $y = x^2 - 3x + 7$

66. $y = -x^2 - 2x + 15$

67. $y = 3x^2 + 7x + 3$

68. $y = -x^2 - 5x$

69. $y = -x^2 - 8$

70. $y = -2x^2 - x + 20$

71. $y = -4x^2 + 8x + 5$

72. $y = 3x^2 + 5x - 8$

Grafique cada ecuación cuadrática y determine las intersecciones con x , si existen. Si no existen, indíquelo.

73. $y = x^2 - 2x$

74. $y = -3x^2 + 6$

75. $y = x^2 - 2x - 15$

76. $y = -x^2 + 5x - 6$

77. $y = x^2 - x + 1$

78. $y = x^2 + 5x + 4$

79. $y = -x^2 - 6x$

80. $y = x^2 + 4x + 3$

81. $y = -x^2 + 2x - 3$

82. $y = 3x^2 - 4x - 8$

83. $y = -2x^2 + 7x - 3$

84. $y = x^2 - 5x + 4$

[10.1–10.4] Resuelva.

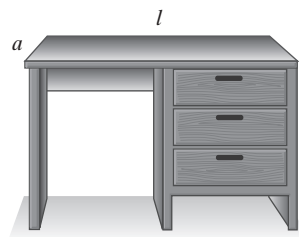
85. **Producto de enteros** El producto de dos enteros pares consecutivos es 48. Determine los enteros.

86. **Producto de enteros** El producto de dos enteros positivos es 88. Determine los dos enteros, si uno es 3 unidades mayor que el otro.

87. **Mesa rectangular** Samuel Jones está fabricando una mesa con cubierta rectangular para la cocina. Él determina que el largo de la cubierta de la mesa debe ser 6 pulgadas mayor que el doble del ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la cubierta de la mesa, si su área será de 920 pulgadas cuadradas?

88. **Escritorio de madera** Hace poco, Jordan y Patricia Wells compraron un escritorio de roble para el cuarto de su hijo. Para proteger la superficie de escritura del escritorio,

decidieron cubrir la superficie con un vidrio. El largo del escritorio es 20 pulgadas mayor que su ancho. Determine las dimensiones del vidrio que Jordan y Patricia deben comprar, si el área del escritorio es 1,344 pulgadas cuadradas.



[10.5] Escriba cada número imaginario o complejo en términos de i

89. $\sqrt{-4}$

90. $\sqrt{-30}$

91. $4 - \sqrt{-25}$

92. $5 - \sqrt{-60}$

Sume o reste los números complejos.

93. $(4 - 6i) + (5 - 3i)$

94. $(9 + 5i) - (6 - 3i)$

Resuelva las ecuaciones cuadráticas y escriba las soluciones complejas en términos de i .

95. $3x^2 = -27$

96. $4p^2 = -20$

97. $2r^2 - 5r + 8 = 0$

98. $4w^2 - 8w + 9 = 0$

Examen de práctica del capítulo

- Resuelva $x^2 - 4 = 28$, usando la propiedad de la raíz cuadrada.
- Resuelva $(2p - 4)^2 = 17$, usando la propiedad de la raíz cuadrada.
- Resuelva $x^2 - 6x = 40$, completando el cuadrado.
- Resuelva $r^2 + 7r = 44$, completando el cuadrado.
- Resuelva $k^2 = 13k - 42$, por la fórmula cuadrática.
- Resuelva $2x^2 + 5 = -8x$, por la fórmula cuadrática.
- Resuelva $16x^2 = 49$, con el método que usted prefiera.
- Escriba la fórmula cuadrática.
- Proporcione un ejemplo de un trinomio cuadrado perfecto.
- Determine si $-2x^2 - 4x + 2 = 0$ tiene dos soluciones reales y distintas, una sola solución real o ninguna solución real. Explique su respuesta.
- Determine si $x^2 + 8x + 16 = 0$ tiene dos soluciones reales y distintas, una sola solución real o ninguna solución real. Explique su respuesta.
- Determine la ecuación del eje de simetría de la gráfica de $y = -x^2 - 6x + 7$.
- Determine la ecuación del eje de simetría de la gráfica de $y = 4x^2 - 16x + 9$.
- Determine si la gráfica de $y = -x^2 - 6x + 7$ abre hacia arriba o hacia abajo. Explique su respuesta.
- Determine si la gráfica de $y = 4x^2 - 8x + 9$ abre hacia arriba o hacia abajo. Explique su respuesta.
- ¿Qué es el vértice de la gráfica de una parábola?
- Determine el vértice de la gráfica de $y = -x^2 - 8x - 12$.
- Determine el vértice de la gráfica de $y = 3x^2 - 8x + 9$.
- Grafique la ecuación $y = x^2 + 2x - 8$ y determine las intersecciones con x , si las hay.
- Grafique la ecuación $y = -x^2 + 6x - 9$ y determine las intersecciones con x , si las hay.
- Grafique la ecuación $y = 2x^2 - 6x$ y determine las intersecciones con x , si existen.
- Mural** El largo de un mural rectangular es 1 pie mayor que el triple de su ancho. Determine el largo y el ancho del mural si su área es 30 pies cuadrados.



- Enteros impares consecutivos** El producto de dos enteros impares consecutivos es 99. Determine el mayor de los dos enteros.
- Edad de Shawn** Shawn Goodwin es 4 años mayor que su primo, Aarón. El producto de sus edades es 45. ¿Cuál es la edad de Shawn?
- Resuelva la ecuación cuadrática $3p^2 - 2p + 6 = 0$ y escriba su respuesta en términos de i .

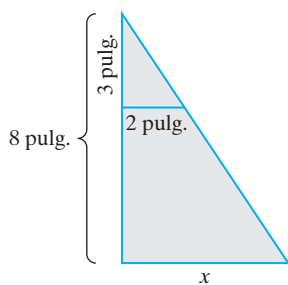
Examen de repaso acumulativo

Resuelva el siguiente examen y confronte sus respuestas con las que aparecen al final del examen. Repase cualquier pregunta que haya respondido de manera incorrecta. La sección y el objetivo en donde se estudió el material se indica a continuación de la respuesta.

1. Evalúe $-5x^2y + 3y^2 - xy$ cuando $x = 4$ y $y = -3$.

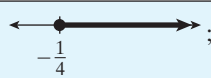
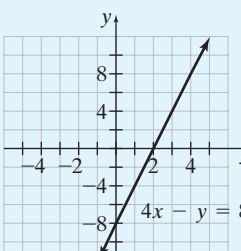
2. Resuelva la ecuación $\frac{1}{2}z - \frac{2}{7}z = \frac{1}{5}(3z - 1)$.

3. Determine la longitud del lado x .



4. Resuelva la desigualdad $2(x - 3) \leq 6x - 5$ y grafique la solución en una recta numérica.
5. Despeje P de la fórmula $A = \frac{m + n + P}{3}$.
6. Simplifique $(6a^4b^5)^3(3a^2b^5)^2$.
7. Divida $\frac{x^2 + 6x + 5}{x + 2}$.
8. Factorice por agrupamiento, $2x^2 - 3xy - 4xy + 6y^2$.
9. Factorice $6x^2 - 27x - 54$.
10. Suma $\frac{4}{a^2 - 16} + \frac{2}{(a - 4)^2}$.
11. Resuelva la ecuación $x + \frac{48}{x} = 14$.
12. Grafique la ecuación $4x - y = 8$.
13. Mediante el método de suma y resta, resuelva el sistema de ecuaciones.
- $$\begin{aligned} 5x - 3y &= 12 \\ 4x - 2y &= 6 \end{aligned}$$
14. Simplifique $\sqrt{\frac{2x^2y^3}{12x}}$.
15. Suma $2\sqrt{28} - 3\sqrt{7} + \sqrt{63}$.
16. Resuelva la ecuación $x - 2 = \sqrt{x^2 - 12}$.
17. Resuelva la ecuación $2x^2 + x - 8 = 0$, mediante la fórmula cuadrática.
18. **Fertilizante** Si 4 libras de fertilizante pueden fertilizar 500 pies cuadrados de pasto, ¿cuántas libras de fertilizante se necesitan para fertilizar 3,200 pies cuadrados de pasto?
19. **Hortaliza** La longitud de una hortaliza rectangular es 3 pies menor que el triple de su ancho. Determine el ancho y el largo de la hortaliza, si su perímetro es 74 pies.
20. **Carrera** Robert McCloud corre 3 millas por hora más rápido de lo que camina. Él corre 2 millas y luego camina 2 millas. Si el tiempo total de su recorrido es de 1 hora, determine la velocidad a la que camina y a la que corre.

Respuestas al examen de repaso acumulativo

1. 279; [Sec. 1.9, Obj. 6] 2. $\frac{14}{27}$; [Sec. 2.5, Obj. 2] 3. $5\frac{1}{3}$ pulgadas; [Sec. 2.6, Obj. 5] 4. $x \geq -\frac{1}{4}$; ;
- [Sec. 2.7, Obj. 1] 5. $P = 3A - m - n$; [Sec. 3.1, Obj. 3] 6. $1944a^{16}b^{25}$; [Sec. 4.1, Obj. 3] 7. $x + 4 - \frac{3}{x + 2}$;
- [Sec. 4.6, Obj. 2] 8. $(2x - 3y)(x - 2y)$; [Sec. 5.2, Obj. 1] 9. $3(2x + 3)(x - 6)$; [Sec. 5.4, Obj. 1] 10. $\frac{6a - 8}{(a + 4)(a - 4)^2}$;
- [Sec. 6.4, Obj. 1] 11. 6, 8; [Sec. 6.6, Obj. 2] 12. ; [Sec. 7.2, Obj. 3] 13. $(-3, -9)$; [Sec. 8.3, Obj. 1]

14. $\frac{y\sqrt{6xy}}{6}$; [Sec. 9.4, Obj. 3] 15. $4\sqrt{7}$; [Sec. 9.3, Obj. 1] 16. 4; [Sec. 9.5, Obj. 1] 17. $\frac{-1 + \sqrt{65}}{4}, \frac{-1 - \sqrt{65}}{4}$;
- [Sec. 10.3, Obj. 1] 18. 25.6 libras; [Sec. 2.6, Obj. 3] 19. Ancho = 10 pies, largo = 27 pies; [Sec. 3.4, Obj. 1] 20. Camina: 3 millas por hora, corre: 6 millas por hora; [Sec. 6.7, Obj. 2]